0771439670002

77-14-39-67
(138.5)

вход: 15:23
выход: 15:25

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробъёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сафиуллина Ансара Азатовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
77-14-39-67	90	20	10	20	20	0	20		

77-14-39-67
(138.5)

1	2	3	4	5	6

Чистовик

№1

$$1+\sqrt{2}\sin x\cdot(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x\cdot(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right).$$

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}(\sin^2x-\cos^2x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Big|:\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x=0$$

$$\sin 2x+\cos 2x=0$$

$$\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Ответ. $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

№2

Пусть скорость автомобилиста $2v$, тогда у велосипедиста скорость v. Пусть между A и B – S км. Тогда по условию задачи, начиная отсчёт времени с 14:00, велосипедист затратил $\frac{S}{v}-1$ часов, а автомобилист $\frac{S}{2v}+2$. При этом времени равны $\frac{S}{v}-1=\frac{S}{2v}+2 \iff \frac{S}{2v}=3$, т.е. автомобилист был в дороге 3 ч, а велосипедист 6 ч. $\left(\frac{S}{v}=6\right)$. То есть они приехали в B в 20:00.

Чистовик №2 (продолжение)

Если же в 14:00 выехал автомобилист и сделал остановку в 2 ч, а в 15:00 выехал велосипедист, то получаем, что тогда $\frac{S}{2v}-1+2=\frac{S}{v} \Leftrightarrow \frac{S}{2v}=+1$

То есть автомобилист потратил 1ч на дорогу, а велосипедист 2ч. То есть они прибыли в B в 17:00.

Ответ. в B 20:00 или 17:00.

№3

$x^3-6x^2+7x-1=0$, x_1, x_2, x_3. $x^3+ax^2+bx+c=0$, $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$.

По т. Виета для кубического уравнения получаем:

Для I урав.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7 \\ x_1x_2x_3=+1 \end{cases}$$

Для второго ур.

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)=b \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-c \end{cases}$$

Отсюда $a=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$.

$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_3x_2+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_3^2+x_1x_3+x_1^2+x_2x_3+x_1x_2=$
$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$
$=36+7=43$.

$c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-(x_1x_2+x_3x_1+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=$
$=-(x_1x_2x_3+x_3^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_1x_2x_3)$

Т.к. $x_1x_2x_3\neq 0$, поделим на него обе части

$$\frac{c}{x_1x_2x_3}=-\Big(2+\underbrace{\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}}_{\text{найдём это значение}}\Big)$$

$$\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=7$$

$$\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)(x_1+x_2+x_3)=\frac{x_1}{x_3}+1+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_2}{x_1}+1+1+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}=42$$

$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}=39$$

77-14-39-67 (138.5)

Чистовик №6 (продолжение)

2) Тогда возможны следующие варианты:

а) $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=2\cdot3\cdot313 \Leftrightarrow \alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=312$ (степени с точностью до перестановки везде во всех вариантах)

$N=p_1\cdot p_2^2\cdot p_3^{312} \Rightarrow N^3=p_1^3\cdot p_2^6\cdot p_3^{936}$

б) $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=6\cdot313 \Leftrightarrow \alpha_1=5,\ \alpha_2=372$ $N=p_1^5\cdot p_2^{372} \Rightarrow N^3=p_1^{15}\cdot p_2^{936}$

в) $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=626\cdot3 \Leftrightarrow \alpha_1=2,\ \alpha_2=625$ $N=p_1^2\cdot p_2^{625} \Rightarrow N^3=p_1^6\cdot p_2^{625\cdot3}$

г) $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=939\cdot2 \Leftrightarrow \alpha_1=1,\ \alpha_2=938$ $N=p_1\cdot p_2^{938} \Rightarrow N^3=p_1^3\cdot p_2^{938\cdot3}$

д) $\alpha_1+1=1878 \Leftrightarrow \alpha_1=1877$ $N=p^{1877} \Rightarrow N^3=p^{1877\cdot3}$

Теперь для каждого из 5 вариантов посчитаем $\sigma(N^3)$.

а) $\sigma(N^3)=4\cdot7\cdot937=26236$ в) $\sigma(N^3)=7\cdot1876=13132$

б) $\sigma(N^3)=16\cdot937=14992$ г) $\sigma(N^3)=4\cdot2815=11260$

д) $\sigma(N^3)=1877\cdot3+1=5632$

3) Пусть у числа N 1879 делителей. Тогда $p_{1879}=N$.

Мы можем записать

$$1=p_1<p_2<p_3<p_4<\ldots<p_{1874}<p_{1875}<p_{1876}<p_{1877}<p_{1878}<p_{1879}=N$$

Тогда $p_3\cdot p_{1877}=N$ и $p_4\cdot p_{1876}=N$.

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2 \Leftrightarrow N^2\geq N^2$ – это истинна.

Заметим, что 1879 – простое число (снова можно проверить до 43, в черновике проверил).

Тогда $\sigma(N)=\alpha_1+1=1879$, получается $N=p^{1878}$

$N^3=p^{1878\cdot3}$ и $\sigma(N^3)=1878\cdot3+1=5635$.

Чистовик

№6 (продолжение)

4) Пусть у числа N 1880 делителей. Тогда $p_{1880}=N$. Известно, что

$$1=p_1<p_2<p_3<p_4<\ldots<p_{1875}<p_{1876}<p_{1877}<p_{1878}<p_{1879}<p_{1880}=N$$

N N N N

Тогда $p_4\cdot p_{1877}=N$

$p_3\cdot \cancel{p_4}\cdot p_{1876}\cdot \cancel{p_{1877}}\geq N^2 \Leftrightarrow p_3\cdot p_{1876}\geq N$, но это не так, потому что $p_{1878}>p_{1876} \Leftrightarrow p_3\cdot p_{1878}=N>p_{1876}\cdot p_3$.

То есть 1880 делителей и больше быть не может у N, т.к. не будет выполняться нер-во: $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2$, т.е. будет $N^2>p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}$.

Ответ. 5629, 5635, 26236, 14992, ~~1~~13732, 11260, 5632.

77-14-39-67
(138.5)

Черновик

$2\sqrt{2}\sin x\cos x$

$\frac{S}{v}=\frac{S}{2v}+2$

15:00
16:00
$\boxed{18:00}$

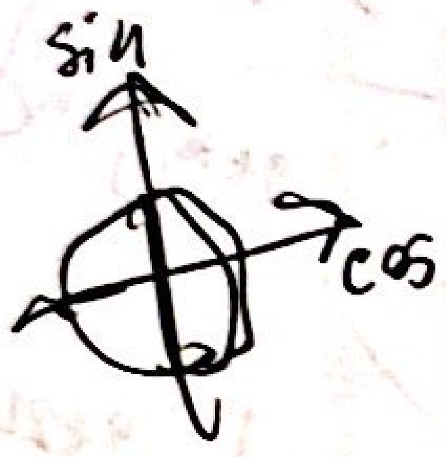
$\frac{S}{2v}=3$ ч.

$\frac{S}{v}=6$ ч

$\frac{S}{v}$

15:00

20:00



$\frac{S}{v}-\cancel{1}=\frac{S}{2v}+\cancel{2}$

20:00

$\frac{2\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\cos^2\alpha$

$^{2/}\frac{S}{v}-\frac{S}{2v}=1$

$\frac{S}{2v}+2=\frac{S}{v}$

$\boxed{\frac{S}{2v}=\cancel{4}}\,3$

$S=2v$

$\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos^2x-\sin^2x$

$\frac{S}{v}$

$\frac{2x-\frac{\pi}{2}+2x}{2}$

$\frac{S}{2v}-1+2=\frac{S}{v}$

$\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$\sin 2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{S}{2v}-\frac{S}{v}=1$

17:00

$\frac{4}{3{,}1}\cdot\frac{9^3}{13}$

$\sin 2x=\cos(-2x)$

$\frac{13}{9}$

x_1+x_2

$-x_1x_2x_3=c$

$x_1x_2x_3=-c$

 дешифр

Черновик

$937 \times 7 = 6559$

$6559 \times 4 = 26236$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \geq N$

$б(N) = 1878$

$б(N) = 1877$

$1877 \nmid N$

$1877 < 1878$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$

$K \leq \sqrt{p_3 \cdot p_4}$

$(p_{1878} K)^2$

$б(N^3)$

$373 : 77$, $77 \cdot 4$, 743, 736

$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < p_{1876} < p_{1877} < p_{1878} < p_{1879} < p_{1880} < p_{1881} = N$

$p_{1874} < p_{1875} < p_{1876} < p_{1877} < p_{1878} = N$

$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots$

20π, 12π, 16π

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$

$p_{1878} > p_{1877}$

$б(N) = 1877$

$б(N) = 1878$

$б(N) = 1879$

$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < p_{1875} < p_{1876} < p_{1877} = N$

$N > p_{1877} \cdot p_4$

$p_3 \cdot p_{1876} \geq N$

$K^2 \leq p_3 \cdot p_4$

$p_3 \cdot p_{1878} = N$

$p_{1879} > p_{1876}$

$p_{1876} < p_{1878}$

$p_3 \cdot p_{1876} < p_{1878} \cdot p_3 = N$

$p_3 \cdot p_{1879} = N > p_{1876} \cdot p_4 N$

$p_4 \cdot p_{1877}$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq p_{1878} \cdot p_{1878} \cdot K^2$

$p_{1876} \cdot p_{1877} \geq \frac{K^2}{p_3 p_4}$

$p_{1878} \cdot p_{1878}$

5

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$

5^3

$\boxed{4}$

$3+1$

1877^3

$373 : 7$, 28, 33

$373 : 11$, 93

$373 : 13$, 26, 53

$N^2 \geq N^2$

$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < p_{1874} < p_{1875} < p_{1876} < p_{1877} < p_{1878} < p_{1879} = N$

$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < p_{1875} < p_{1876} < p_{1877} < p_{1878} < p_{1879} < p_{1880} = N$

Черновик

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$36^3 = 2^6 \cdot 3^6$

9

$1877 \cdot 3 = 5631$

$20 = 2^2 \cdot 5$

$(6+1)(6+1) = 49$

$(2+1)(1+1) = 6$

$20^3 = 2^6 \cdot 5^3$

$(6+1)(3+1) = 28$

$(a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1) = 1877$

$(3a_1+1)(3a_2+1) \cdot \ldots \cdot (3a_k+1)$

~~$1+2+3+4+5$~~

$1877 : 19$ — 177, 107, 9

$1877 : 23$ — 4, 8

$1878 : 3 = 626$

$626 : 2 = 313$

$1877 : 29$ — 174, 137, 16

1879

$1877 : 31$ — 186, 6

$1877 : 73$ — 23, 57, 52, 14

$1877 : 37$ — 5, 5

$2 \cdot 3 \cdot 313$

$313 : 13$ — 26, 53, 2

$313 : 17$ — 17, 143, 7

$47 \cdot 47 = 329$ … 8

41

$43 \cdot 43 = 129 + 172 = 1849$

$1877 : 41$ — 164, 137, 4

$1877 : 43$ — 172, 157, 4

313

$625 \cdot 3 = 1875$

1849

$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) =$
$= a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2a_3 + 1$

$(3a_1+1)(3a_2+1)(3a_3+1) = 3(a_1+a_2+a_3) + 9(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) + 27a_1a_2a_3 + 1$

$(a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_na_{n-1} + \ldots$

$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + 1$

$+ a_1a_2$

$2 \cdot 3 \cdot 313 = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1)$

$937 \cdot 16 = 5622 + 937 = 14992$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 312$

$2815 \cdot 4 = 11260$

$937 \cdot 28 = 7496 + 1874 = 26236$

$6 \cdot 313$

$1877 : 47$

$1877 : 7$ — 14, 47, 42, 57, 26

$a_1 = 5$

$a_2 = 312$

$1876 \cdot 7 = 13132$

$938 \cdot 3 = 2814$

1877 - простое

Черновик

$2\cdot3\cdot313$

$6\cdot313$

$626\cdot3$

$939\cdot2$

$1877=(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)$

$a_1=1876$

$1,2,3,1,2$

$5,312$

$2,625$

$1,938$

1877

$1879 : 7 = 28$, 14, 57, 56, 19

$1879 : 13 = 14$, 13, 57, 52, 59

$1879 : 17 = 9$ … 17, 169

$1879 : 23 = 8$, 184, 39

$p_1^{1876}=N$

1876

$N^3=(p_1^{1876})^3=$

$\boxed{(3\cdot1876+1)}$

$1876 \times 3 = 5628$

$\boxed{5629}$

$1879 : 29 = 6$, 174, 159

$1878 \times 3 = 5634$

$\boxed{5635}$

$1879 : 31 = 6$, 186, 19

$1879 : 37 = 5$, 185, 29

$1879 : 41 = 4$, 164, 239

$1879 : 43 = 4$, 172, 159

$\cancel{\sin}2$

$\cos 2x=\sin(-2x)$

$1 \quad \sin^2 2x+\cos^2 2x+2\sin 2x\cos 2x=0$

$\sin 4x=-1$

$4x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

$-\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$

$1879=1a_1+1$

$a_1=1878$

Чистовик №3 (продолжение)

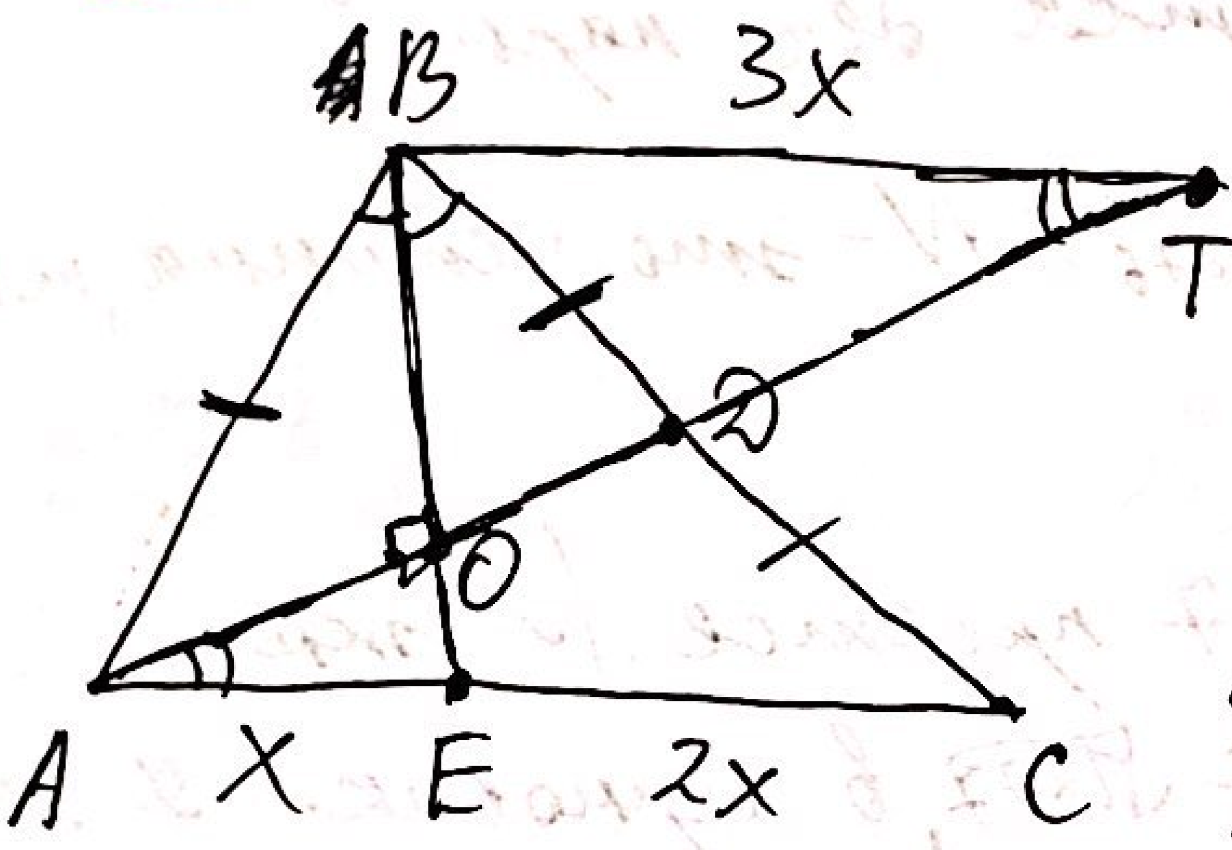
$$\frac{c^{\text{т.е.}}}{x_1x_2x_3} = -(2+39) = -41$$

Значит $c = -41$.

~~Отсюда~~ Получаем из т. Виета един. a, b, c.

Ответ. $a = -12$; $b = 43$; $c = -41$.

№4



Дано: $\triangle ABC$

$BE = AD$, $BE \perp AD$

AD – медиана, BE – биссектриса

$AB = 5\sqrt{13}$

Найти: S_{ABC}.

Решение:

1) Пусть $AD \cap BE = O$. Тогда т.к. BO – высота и биссек., то ABD – равнобедр., т.е. $AB = BD = DC$. ($BC = 2AB = 10\sqrt{13}$)

2) По св-ву биссектрисы: $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$.

3) Сделаем удвоение медианы $AD = DT$. Тогда т.к. D середина BC и AT, что $ABTC$ – параллелограмм.

4) $AC = BT = 3x$

5) $\triangle AOE \sim \triangle BOT$ по 2 углам, при этом:

$\frac{AO}{OT} = \cancel{\frac{BO}{}} \frac{OE}{BO} = \frac{AE}{BT} = \frac{1}{3}$. ~~Тогда если $OE = \frac{BO}{3}$~~

6) $\cdot AO = \frac{OT}{3}$; $OD = \frac{OT}{3}$; $\frac{BE - BO}{BO} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{BE}{BO} = \frac{4}{3}$

$BO = \frac{3}{4}BE = \frac{3}{4}AD$

~~7)~~ 7) $tg \angle ABO = \cancel{\frac{AD}{2}} \frac{AO}{BO} = \frac{AD}{2} \cdot \frac{4^2}{3AD} = \frac{2}{3}$.

8) $\sin(2\angle ABO) = \frac{2 tg\angle ABO}{1 + tg^2(\angle ABO)} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{12}{13}$

9) Тогда $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot \sin(\angle ABC) = \frac{5\sqrt{13} \cdot 10\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{12}{13} =$
$= 300$

Ответ. $S_{ABC} = 300$.

Чистовик №6

1) У числа N понятно, что не может быть меньше чем 1877 делителей. Пусть у числа N ровно 1877 делителей. Тогда $p_{1877} = N$. Мы знаем, что

$$1 = p_1 < \underbrace{p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < p_{1874} < p_{1875} < p_{1876}}_{N} < p_{1877} = N$$

Так же воспользуемся фактом, что все делители числа ~~N~~ разбиваются на пары, кроме квадратного делителя $k = \sqrt{N}$, остаётся без пары.

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot \cancel{p_{1877}} \geq N^{2} \Leftrightarrow p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \geq N$ - это истинна, т.к. $p_3 \cdot p_{1875} = N$, а $p_{1875} < p_{1876}$.

Заметим, что число 1877 простое. (Можно проверить делимость до $43 \approx \sqrt{1877}$, в черновике я это сделал)

Воспользуемся формулой для кол-ва делителей. Т.е. если $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то $\sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n+1)$.

Тогда $\sigma(N) = 1877$, но 1877 - простое, поэтому $\alpha_1 = 1876$.

Тогда $N = p^{1876}$, $N^3 = p^{3 \cdot 1876}$ и $\sigma(N^3) = 3 \cdot 1876 + 1 = 5629$

2) Пусть у числа N 1878 делителей. Тогда $p_{1878} = N$.

И мы можем записать.

$$1 = p_1 < \underbrace{p_2 < p_3 \leq p_4 < \ldots < p_{1874} < p_{1875} < p_{1876}}_{N} < p_{1877} < p_{1878} = N$$

Тогда $p_3 \cdot p_{1876} = N$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2 \Leftrightarrow p_4 \cdot p_{1877} \geq N$ - это истинна, т.к. $p_4 \cdot p_{1875} = N$, а $p_{1877} > p_{1875}$.

Заметим, что $1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$

Тогда по рассуждениям выше $\sigma(N) = 1878$.

~~тогда~~ ~~$(\alpha_1+1)\cdot($~~