01-21-79-32
(138.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-2

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Берендюгиной Екатерины Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
01-21-79-32	85	20	20	20	20	0	5		

Чистовик 1

1	2	3	4	5	6

Задача 1.

$$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-\sqrt{2}\cos x\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\cos x\sin x=0$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=0$$

$$\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=0 \quad \Big|\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 2x-\sin 2x-2\sin 2x-4\cos 2x=0$$

$$-3\cos 2x-3\sin 2x=0$$

$$-\cos 2x=\sin 2x \quad (\cos 2x=0 \text{ не решение})$$

$$-1=\operatorname{tg}2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{3}{4}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{8}+\pi k\\ x=\frac{3}{8}\pi+\pi n\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{8}+\pi k,\ \frac{3}{8}\pi+\pi n\right\}$

Задача 2.

Разберем все варианты.

Пусть путь между A и B − S, скорость велосипедиста v, тогда скорость мотоциклиста $2v$.

1). В 12:00 выехал велосипедист и он еще делал остановку в 2 часа.

$\frac{S}{v}+2$ − время, которое ехал велосипедист

$1+\frac{S}{2v}$ − время которое ехал мотоциклист, учитывая что начал позже $\Big\}\ \frac{S}{v}+2=1+\frac{S}{2v}$

~~1 лист~~

Равенство потому что прибыли одновременно Чистовик 2

$$\frac{S}{v}+2=1+\frac{S}{2v}$$

$1=-\frac{S}{2v}$ - проблема, $\frac{S}{2v}$ точно положительное число

2). В 12:00 выехал велосипедист и он не делал остановку

$\frac{S}{v}$ - время велосипедиста

$3+\frac{S}{2v}$ - время мотоциклиста, считая от 12:00 и считая остановку

$$\begin{cases}\frac{S}{v}=3+\frac{S}{2v}\end{cases}$$

$$\frac{S}{2v}=3$$

$$\frac{S}{v}=6$$

Выходит, что в пункт B они прибыли в 18:00

3). В 12:00 выехал мотоциклист и он делал остановку

$\frac{S}{2v}+2$ - время мотоцикл.

$1+\frac{S}{v}$ - время велосипед.

$$\begin{cases}2+\frac{S}{2v}=1+\frac{S}{v}\end{cases}$$

$$1=\frac{S}{2v}$$

Выходит, что в пункт B они прибыли в 15:00

4). В 12:00 выехал мотоциклист и он не делал остановку значит останавливался велосипедист

$\frac{S}{2v}$ - время мотоцикл.

$\frac{S}{v}+3$ - время велосипед.

$$\begin{cases}\frac{S}{2v}=\frac{S}{v}+3\end{cases}$$

$-\frac{S}{2v}=3$ - проблема, т.к. $\frac{S}{2v}>0$

Ответ: в 18:00 или в 15:00

Задача 3. Чистовик 3

Воспользуемся теоремой Виета, которая утверждает что если x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3+6x^2+7x+1=0$, то

$x_1+x_2+x_3=-6$ (1)

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$ (2)

$x_1x_2x_3=-1$ (3)

Аналогично, если x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, то

1). $a=-(x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1)=-2(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot(-6)=12$ из (1)

2). $b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_1^2+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_2x_1+x_3^2+x_3x_1=$

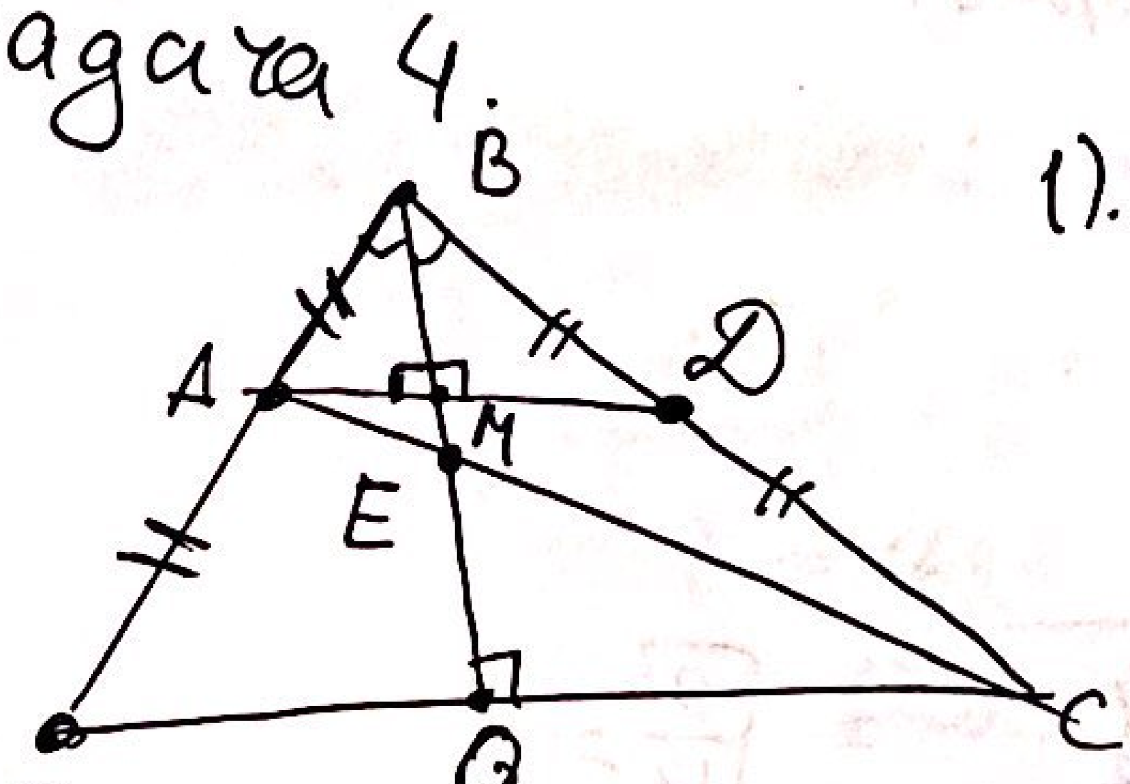
$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=(-6)^2+7=36+7=43$

3). $c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)\cdot(x_3+x_1)=-(x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2x_1x_3)=-((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3)=$

$=-((-6)\cdot 7+1)=-(-42+1)=41$

Ответ: $a=12$
$b=43$
$c=41$

Задача 4



1). Рассмотрим $\triangle ABD$:

BE - высота и биссектриса $\Rightarrow$ ABD - р/б.
(BE $\perp$ AD по условию)

$AB=BD=\sqrt{26}$

Пусть $BE \cap AD=\{M\}$

Обозначим $AD=BE=x$

Т.к. BE - биссектр. в равнобедр. треугольнике, то она и медиана

Чистовик 4

это значит, что $AM = MD = \frac{x}{2}$

2). Достроим BA за точку A так, чтобы $BF = BC$

AD - медиана $\Rightarrow BD = DE = \sqrt{26}$ и $BC = 2\sqrt{26}$

Т.к $BF = 2\sqrt{26}$, а $AB = \sqrt{26}$, то $BF = \sqrt{26}$ и CA - медиана треугольника BFC

3). Продлим BE до пересечения с FC - точка O. тогда BE - биссектриса в $\triangle BCF$, а т.к. он равнобедренный, то она и медиана (и высота)

Значит точка E - точка пересечения медиан треугольника BFC

тогда $BE : EO = 2:1$ и $EO = \frac{x}{2}$ и $BO = 1{,}5x$

BE - биссектриса, а значит и высота в $\triangle BFC \Rightarrow BO \perp CF$

Также заметим, что AD в $\triangle BFC$ - средняя линия, а значит $FC = 2AD = 2x$. Но BO также медиана, а значит $OC = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2} \cdot 2AD = AD = x$

4). $\triangle BOC$:

Т. Пифагора: $BO^2 + OC^2 = BC^2$

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + x^2 = (2\sqrt{26})^2$$

$$\frac{13}{4}x^2 = 4 \cdot 26$$

$$x^2 = 16 \cdot 2$$

$$x = 4\sqrt{2}$$

5). $\triangle ABM$:

Пусть $\angle ABM = \alpha = \angle MBC$ (BE - биссектриса)

$BM \perp AD$ по условию

$$\sin\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{13} = \frac{12}{13}$$

01-21-79-32
(138.5)

Чистовик 5

6). $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{26} \cdot 2 \cdot \sqrt{26}}{2} = 24$

Ответ: 24

Задача 6.

Заметим, что $p_1 \cdot p_k = N$ и $p_i \cdot p_{k+1-i} = N$ (св-во делителей расположенных в порядке возрастания). ($k \in \mathbb{N}$, k - к-во делителей числа N)

Тогда рассмотрим несколько случаев.

1). $1697 < k-2$, тогда $1696 < k-3$

$$\left.\begin{aligned} &0 < p_3 \cdot p_{1697} < p_3 \cdot p_{k-2} = N \\ &\text{и} \\ &0 < p_4 \cdot p_{1696} < p_4 \cdot p_{k-3} = N \end{aligned}\right\} \; p_3 \cdot p_{1697} \cdot p_4 \cdot p_{1696} < N^2$$ - не удовл. условиям задачи

2) $1697 = k-2$, тогда $1696 = k-3$

$$\left.\begin{aligned} &p_3 \cdot p_{1697} = N \\ &p_4 \cdot p_{1696} = N \end{aligned}\right\} \; p_3 \cdot p_{1697} \cdot p_4 \cdot 1696 = N^2$$ - такой вариант подходит, тогда

$k = 1699$

3). $1697 > k-2$, тогда $1696 > k-3$

$$\left.\begin{aligned} &p_3 \cdot p_{1697} > p_{k-2} \cdot p_3 = N \\ &p_4 \cdot 1696 > p_{k-3} \cdot p_4 = N \end{aligned}\right\} \; p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1697} \cdot p_{1696} > N^2$$

Ну и этот вариант устраивает, тогда $1699 > k$

Вывод: k может быть 1699, 1698, 1697 (меньше быть не может, т.к. p_{1697} точно есть)

~~[illegible]~~

1). Пусть $N = \gamma^{\alpha}$, где γ - простое число, тогда

$$\left[\begin{aligned} &\alpha+1 = 1699 \\ &\alpha+1 = 1698 \\ &\alpha+1 = 1697 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\alpha = 1698 \\ &\alpha = 1697 \\ &\alpha = 1696 \end{aligned}\right.$$

$N^3 = \gamma^{3\alpha}$ $\quad \sigma(N^3) = 3\alpha + 1$

~~5 лист~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Тогда $\sigma(N^3) = \left[\begin{array}{l} 1698\cdot 3+1 \\ 1697\cdot 3+1 \\ 1699\cdot 3+1 \end{array}\right.$ Чистовик 6

$$\sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_n+1)$$

Если $\underbrace{N = \gamma_1^{\alpha_1}\cdot\gamma_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\gamma_n^{\alpha_n}}_{\text{разложение на простые множ.}}$ γ_i - простые числа

α_i - натур. числа и 0.

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_n+1)$ $1 \le i \le n$ $i \in \mathbb{N}$

попробуем найти разложение на множители чисел 1698, 1697, 1699.

Начнем с 1698:

$1698 = 2\cdot 3\cdot 283$

$1698 = 1\cdot 1698$ - рассмотрена

$1698 = 2\cdot 849 \Rightarrow \sigma(N^3) = 4\cdot(848\cdot 3+1)$

$1698 = 3\cdot 566 \Rightarrow \sigma(N^3) = 7\cdot(565\cdot 3+1)$

$1698 = 6\cdot 283 \Rightarrow \sigma(N^3) = (5\cdot 3+1)(282\cdot 3+1)$

Числа 1697 и 1699 простые (перебор до корня на черновике), а значит возможен лишь вариант

$1697 = 1\cdot 1697$

$1699 = 1\cdot 1699$

Их мы рассмотрели.

Вывод: $\left[\begin{array}{l} 1698\cdot 3+1 \\ 1697\cdot 3+1 \\ 1696\cdot 3+1 \\ 4\cdot(848\cdot 3+1) \\ 7\cdot(565\cdot 3+1) \\ 16\cdot(282\cdot 3+1) \end{array}\right.$

Черновик

5 7 ~~8~~ 11 13 17 19 23 29 31 37 41

1697 − 152 = 177

1699 − 152 = 179

19 × 8 = 152

152 + 19 = 171

23 × 7 = 161

29 × 4 = 6

29 × 5 = 145

23 69 92

87 89

1697 − 145 = 247

1699 249

29 × 8 = 232

29 × 3

16 + 7 = 23

29 × 9 = 261

18 + 8

1697 − 155 = 147

1699 149

31 × 5 = 155

31 × 4 = 144

1697 − 148 = 217

1699 − 148 = 219

37 × 4 = 148

37 × 6 = 222

22

41 × 4 = 164

57 59

черновик

S

A B

$\vartheta_м = 2\vartheta_в$

Пусть первым в вел к велосип.

ост ↙ ↘ без ост

$\frac{S}{\vartheta_в} + 2 = 1 + \frac{S}{2\vartheta_в}$

$\frac{S}{\vartheta_в}$ время

$3 + \frac{S}{2\vartheta_в} = \frac{S}{\vartheta_в}$

$3 = \frac{S}{2\vartheta_в}$

$6 = \frac{S}{\vartheta_в}$

первым был не пешком

217 ост 37 ↙ ↘ не ост. 29

$\frac{S}{2\vartheta_в} + 2 = 1 + \frac{S}{\vartheta_в}$ $\frac{S}{2\vartheta_в} = 1 + \frac{S}{\vartheta_в} + 2$

$1 = \frac{S}{2\vartheta_в}$

$2 = \frac{S}{\vartheta_в}$

$\frac{S}{2\vartheta_в} + 2 = 1 + \frac{S}{\vartheta_в}$

$1 = \frac{S}{2\vartheta_в}$

p_1 p_2 p_3 p_4 1696 1697 1698 1699

p_3 p_4 p_{1697}

p_3 p_4 ниже 1696 1697

149 всего делителей у p_3

17 17 хотя бы

P 1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

1701 делитель

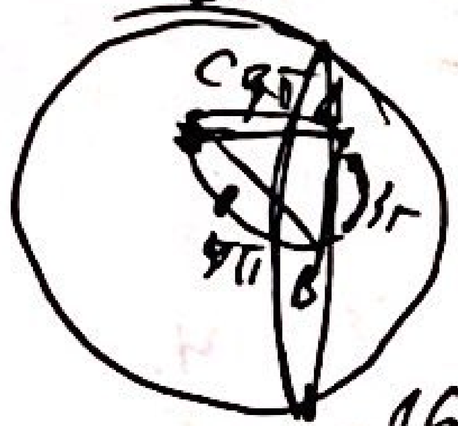
1697

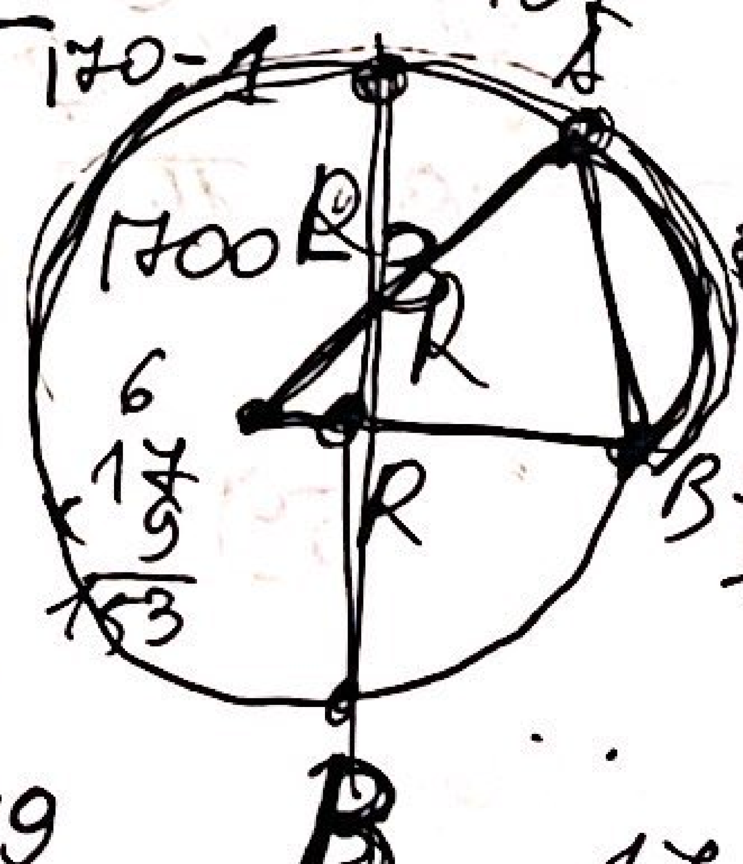
больше.

$\sqrt{N}$

$-\frac{1698}{16}\Big|\frac{2}{849}$

$2\pi = 180°$





B

6 178

17 ~~пределы~~ четыре

1 6 3 2

36 8 чел

283 849

164 283

хоть бы с 3

$1\,2\,3\,4\,6$ $9\,12\,36$

$15 = 5 \cdot 3$ $N + N - 1 =$

$1\,2\,3\,4\,6\,9\,12\,18\,36$ N^2

17

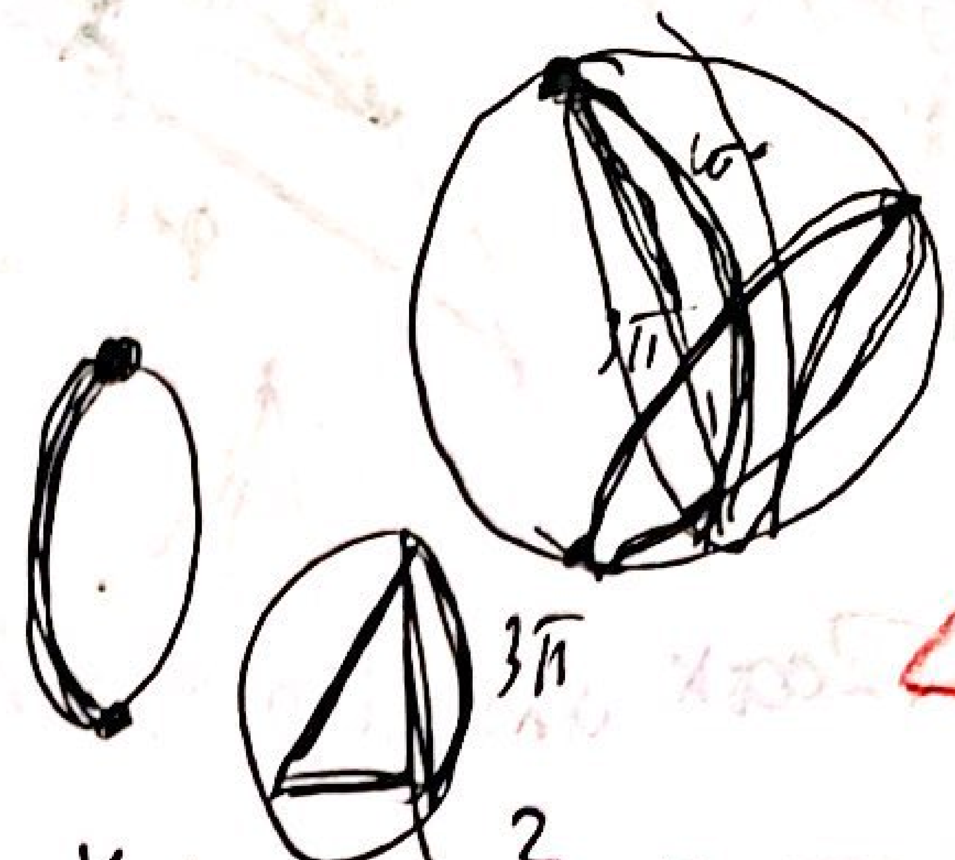
$x^3+6x^2+7x+1=0$ Черновик

это сумма

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1$

$a=12$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$



$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$

$x_1^2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_1x_3+x_1^2+x_1x_3+x_2x_1$

$+x_1x_2+\cancel{x_1x_3}+x_2^2+x_3x_2+\cancel{x_1x_3}+x_1^2+\cancel{x_2x_3}+\cancel{x_1x_1}+$

$+\cancel{x_2x_3}+\cancel{x_2x_1}+x_3^2+x_3x_1$

$b=36+7=4$

$43 \cdot 43 = 129 + 172 = 1849$

1699 41

$41 \cdot 41 = 41 + 164 = 1681$

40

$c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$

$(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1^2x_2+$

$x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_1x_2x_3$

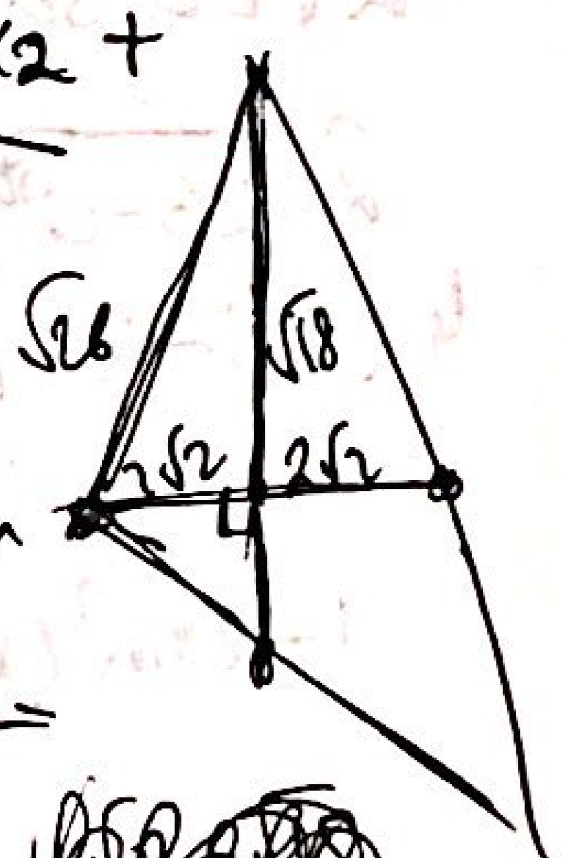
$26-4\cdot 2=$

$26-8=18$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$ попробуем

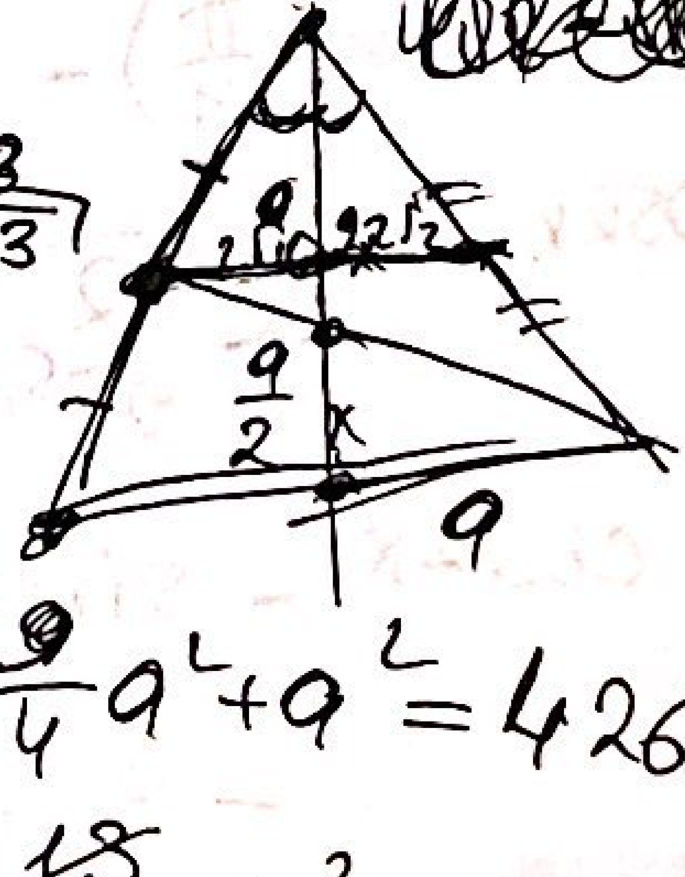
$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots\times(\ =$

$3\alpha_1+1$



$\sin\frac{2\sqrt2}{\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos=1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}=\frac{3}{\sqrt{13}}$



Всего делителей N 161700

k-2 1696 1697 x

$\frac{9}{4}a^2+a^2=4\cdot 26$

$\frac{13}{4}\cdot a^2=4\cdot 26$

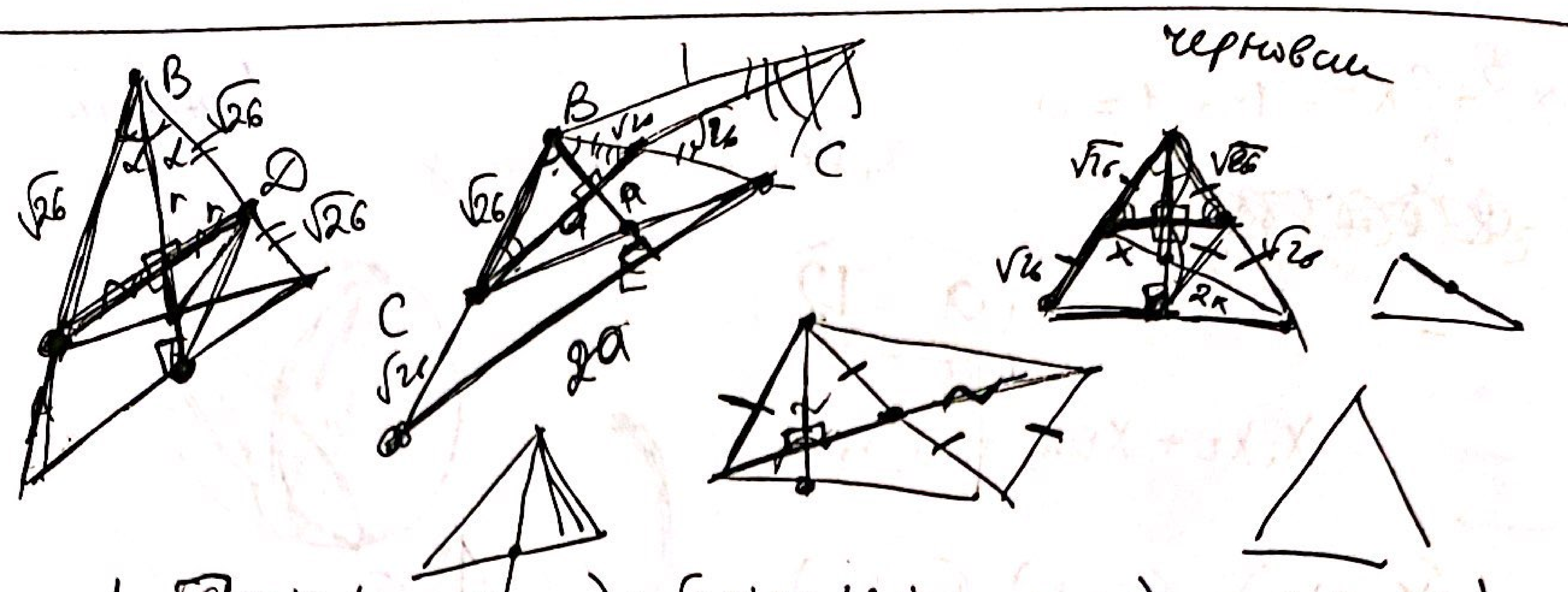
$a^2=8\cdot 4=$

$a=\sqrt{32}=4\sqrt2$

$\frac{9}{4}a^2+a^2=4\cdot 26$

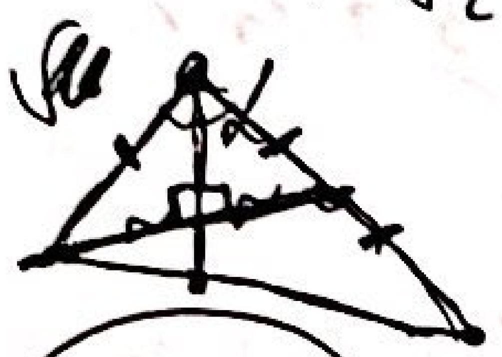
$\frac{13}{4}a^2=4\cdot 26$ $a=4\sqrt2$

черновик



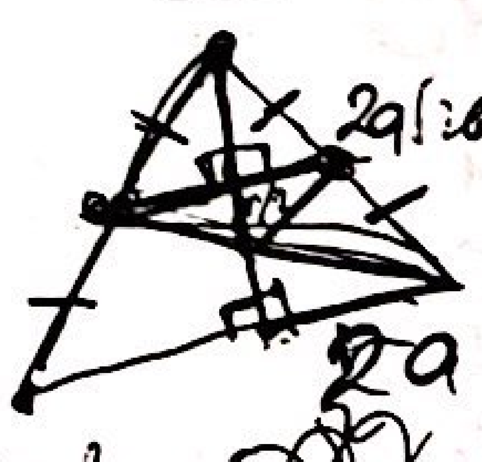
$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{2}\cos x\sin x+2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x\sin x\sqrt{2}$



cos2α

$1-2\sin^2 x$

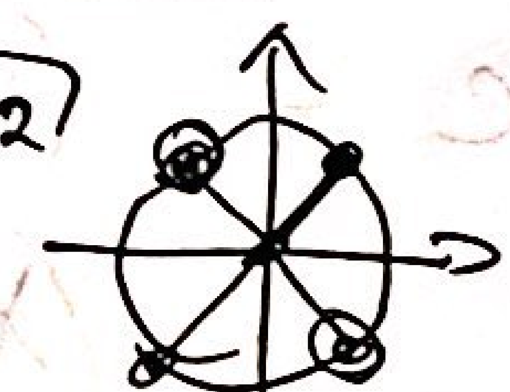


$2a\sqrt{26}$ $-2\sqrt{2}\cos x\sin x=2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=$

$2a$

$=2\sin^2-1$

$\sqrt{26-a^2}$



$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

$2\sqrt{26-a^2}$ $-\frac{1698}{15}$ $\frac{3}{566}$

$-2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$2\sqrt{26-a^2}$

$4(26-a^2)+4a^2=4\cdot 26$

$1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}\cos x\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=0$

$\cos(2x+\frac{\pi}{4})-$

$\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{2}\sin 2x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=0 \quad \Big|\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\cos 2x-\sin 2x-2\sin 2x-4\cos 2x=0$

$-3\cos 2x-3\sin 2x=0$

$\cos 2x=-\sin 2x$

$0=-\mathrm{tg}\, 2x$