0 149121 510002

14-91-21-51
(140.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Страдина Артемия Борисовича Страдин
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
14-91-21-51	112	14	21	21	14	21	21	X	X

Оценка: 90 (девяносто)

14-91-21-51
(140.1)

90(девяносто)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик I

1	2	3	4	5	6.

Чистовик 2

Задача №2.

Представим наш город в виде графа, где перекрёстки – вершины графа, а ~~част~~ участки дороги – рёбра.

Мы хотим найти наибольшее число X участков дорог, которые можно перекрыть на ремонт. Перекрывая дорогу мы убираем ребро из графа. Значит из нашего графа мы хотим убрать наибольшее число рёбер так, чтобы он остался связным, то есть убрать все циклы то есть „превратить" наш граф в дерево. Заметим, что в дереве с N вершинами (N−1) ребро. В нашем ~~графе~~ графе (городе) всего ~~230~~ 23·10 = 230 вершин => после перекрытия на ремонт всех ~~возможных~~ дорог ~~а~~ так, чтобы выполнялось условие, останется 230−1 = 229 участков дорог

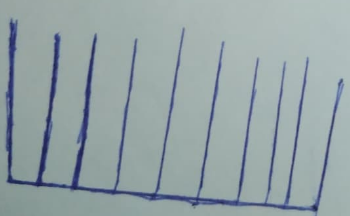
Изначально дорог было 23·9 + 22·10 = 427 => можно перекрыть 427−229 = ~~198~~ 198 участков дорог

улицы

промежутков между проспектами

промежутки между улицами

Пример: в каждом промежутке между проспектами перекроем на ремонт 22 (из 23) участков улиц, тогда наш город будет выглядеть примерно так (~~все закр~~ (нарисованы только открытые участки дороги)



перекрыть: 22·9 = 198 участков дорог.

кол-во промежутков между проспектами

Ответ: 198 участков дорог.

Чистовик 3

№3. Представим нашу систему пакетов, в виде графа, где вершины - пакеты, а ребра символизируют нахождение одного пакета в другом*. Ориентируем наш граф таким образом, чтобы ребро, ~~соед~~ соед. два пакета было направлено от пакета в котором лежит пакет на другом конце ребра. Т.к. ~~к~~ один пакет не может лежать* в нескольких пакетах одновременно, то ~~г~~ получившийся граф является ориентированным деревом (компонента связности одна т.к. изначально есть 1 пакет, в котором наход. все остальные). Т.к. в одном пакете может лежать ровно 5 других пакетов, рассмотрим 101 пустой пакет. Разобьем наш 101 пакет на группы по 5 пакетов, которые лежат в одном пакете: получим 20 групп(1) (лежащих ~~по~~ в 20 новым пакетам)(2) и 1 еще один пакет останется. Рассмотрим имеющие 21 пакет. также разделим их на группы по 5 пакетов: получим 4 группы(2) и 1 ~~билет~~ пакет останется.

Таким образом остается 5 пакетов, для которых понадобится еще один пакет. Значит всего пакетов: 101 + 20 + 4 + 1 = 126 ~~пак~~

Ответ: 126 пакетов.

(1) Имеется в виду то, что для того чтобы разложить 100 пакетов понадобится 20 других пакетов (они не обязательно будут лежать по 5 пустых в одном).

(2) ~~Тоже с~~ См. пункт 1.

*если пакет 1 лежит в пакете 2, то мы можем достать из пакета 2 пакет 1 не доставая других пакетов.

№5. Чистовик 4.

Покори Воробьевы горы

1) Посчитаем сколько раз каждая буква встречается в надписи.

П - 1
О - 5
К - 1
Р - 2
И - 1
В - 2
Б - 1
Ь - 1
Е - 1
Ы - 2
Г - 1.

2) ~~Выигр~~ Выигрышная стратегия для Алисы(того, кто ходит первым):

Первым ходом мы[v] зачеркиваем 2 ~~раз~~ буквы „О".

~~[illegible]~~ *(5 → 3)

Дальше у второго игрока есть несколько вариантов хода, рассмотрим каждый из них.

1. 3 → 0, тогда мы[v] ходим 2 → 1.

Заметим, что в таком случае

2 буквы будут встречатся 2 раза и 8 букв будут встречатся ~~раз~~ по одному разу. В такой ситуации ~~мы можем повто~~ мы можем повторять ход соперника и ~~вы~~ в конце вычеркнуть последнюю букву (Во всех последующих случаях ~~Я~~ ~~мы~~ ~~Я~~ мы[v] будем приводить к такой же (или похожей) ситуации, важно понимать, что чтобы повторять кол-во букв встречающихся n раз должно быть четным для всех n)

2. 3 → 1, мы[v] ходим 2 → 0 и повторяем
3. 3 → 2, мы[v] ходим. 1 → 0 и повторяем
4. 2 → 1, мы[v] ходим 3 → 2 и повторяем
5. 2 - 0, мы[v] ходим 3 - 1 и повторяем
6. 1 - 0., мы[v] ходим 3 - 2 и повторяем.

Действуя по данному алгоритму Алиса[v] (тот кто ходит первым) всегда сможет выиграть

Ответ: да, есть, она приведена выше.

v мы = I игрок. (Алиса(тот, кто ходит первым))

* Дальше ход каждого игрока будет записываться следующим образом: x → y ~~x - сколько раз встречалась ~~буква~~ до буд~~

x - сколько раз встречалась зачеркиваемая буква до хода,

y - сколько раз эта буква встречалась после хода.

14-91-21-51 (140.1)

Чистовик 5.

№4.

$b_1 = 2$

$b_2 = 1$

$b_3 = 2.$

~~Зап~~

1) Запишем ~~b_4, b_5~~ несколько членов последовательности через b_1, b_2 и b_3:

$b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3}$

$b_5 = \frac{b_1^3 \cdot b_3^6}{b_2^8}$

$b_6 = \frac{b_1^6 \cdot b_3^{10}}{b_2^{18}}$

$b_7 = \frac{b_1^{10} \cdot b_3^{15}}{b_2^{33}}$

$b_8 = \frac{b_1^{15} \cdot b_3^{21}}{b_2^{53}}$

2) т.к. $b_2 = 1$ оно не влияет на ответ. рассмотрим степени b_1 и b_3 для разных n.

n	степень b_1	степень b_3
4	1	3
5	3	6
6	6	10
7	10	15
8	15	21.

3) заметим, что степени b_1 ~~[illegible]~~ образуют последовательность, запись i-го члена которой выглядит так.

$a_i = \frac{i \cdot (i+1)}{2}$, а степени b_3 – та же последовательность сдвинутая на 1. Тогда найдем, как эти последовательности записываются через n:

для b_1: $a_i = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$

для b_3: $c_i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Значит b_{2023} будет выглядеть следующим образом:

$b_{2023} = b_1^{\frac{2020 \cdot 2021}{2}} \cdot b_3^{\frac{2021 \cdot 2023}{2}} = 2^{2043231} \cdot 2^{2041210} = 2^{3084441}.$

Ответ: $b_{2023} = 2^{3084441}$.

Чистовик 6

№1 $p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$.

Заметим, что если p и q нечётные, ~~так~~ и простые, то $p-1>0$
p^q - неч ; q^p - неч ; 3 - неч $\Rightarrow$ неч + неч + неч = чет, а такого быть не может, значит $\left[\begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} p=2 \\ p^q - q^p + 3 = 2^{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ 2^q - q^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ q^2 = 2^q + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases}$ заметим, ~~что~~ что

при увеличении q, $q^2 << 2^q \Rightarrow \begin{cases} q=3 \\ p=2 \end{cases}$ единственный вариант, т.к. 2 и 3 – 2 наименьших простых числа.

2) $\begin{cases} q=2 \\ p^q - q^p + 3 = 2^{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ p^2 + 3 = 2^{p-1}(2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ 3\cdot 2^{p-1} = p^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

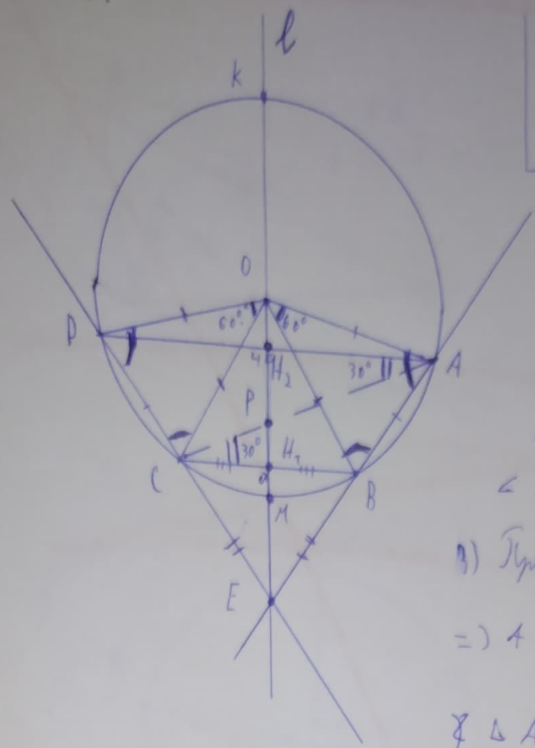
$\Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}$ при увеличении p $3\cdot 2^{p-1} >> p^2+3 \Rightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}$ – единственный

вариант т.к. 2 и 3 – ~~те~~ 2 наименьших простых числа

Ответ: $\{(2;3);(3;2)\}$.

Чистовик 7.

№6.



Дано $\angle DOA = 60^\circ$
$DA \parallel BC$; $AD = 4BC$.
$AC = 30$. S_{AED} - ?

1) $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция

2) $ABCD$ - вписана $\Rightarrow$ трапеция равнобокая $\Rightarrow AB = DC$ и $\angle ADC = \angle DAB$.

3) Проведем DO и OC - радиусы $\Rightarrow$
$\Rightarrow AO = OB = OD = OC$

Х $\triangle AOB$: $OA = OB$, $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA \, (OA = OB) = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow OA = OB = AB$

4) Х $\triangle ODC$ и $\triangle AOB$: $OA = OB = OD = OC$; и $AB = DC \Rightarrow \triangle ODC = \triangle AOC$

5) Х $\triangle ADE$: $\angle ADC = \angle DAB \Rightarrow$ ~~AD~~ $AE = DE$; $AB = DC \Rightarrow BE = EC$

6) ~~Заметим, что EO.~~

6) проведем $l \perp BC$, заметим, что т.к. EBC - р/б, то EH_1 и высота и медиана. Заметим, что тогда KM - делит BC пополам и ~~перпендикулярна~~ $KM \perp BC \Rightarrow$ ~~$O \in l$~~ $O \in KM \in l$

Заметим, ~~что~~ что $l \perp AD$, KM - диаметр $\Rightarrow DH_2 = AH_2$

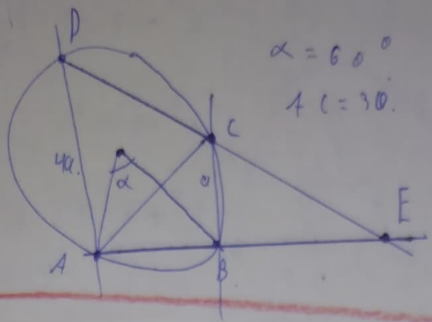
7) Х $\angle ACB$, он стягивает дугу $\overset{\frown}{AD} = 60^\circ$, он вписаный $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 30^\circ$

8) Х $\triangle CPH_1$ и APH_2: ~~$PH_1 = \frac{1}{2}$~~ $H_1H_2 \perp AD \parallel BC \Rightarrow PH_2 = \dfrac{AP}{2}$; $PH_1 = \dfrac{CP}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow PH_1 + PH_2 = H_1H_2 = \dfrac{AP + CP}{2} = \dfrac{AC}{2} = 15.$

Х $\triangle ADE$ и $\triangle BCE$: $BC \parallel AD \Rightarrow \angle EBC = \angle EAD$; $\angle ECB = \angle EDA \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BCE$ по двум углам. с коэф подобия $k = \dfrac{AD}{BC} = 4. \Rightarrow \dfrac{EH_2}{EH_1} = 4.$

9) $\dfrac{EH_2}{EH_1} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{EH_1 + H_1H_2}{EH_1} = 4 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{H_1H_2}{EH_1} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{15}{EH_1} = 3 \Leftrightarrow EH_1 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{EH_2} = H_1H_2 + EH_1 = 15 + 5 = \boxed{20}$. Х $\triangle APH_2$: $AH_2 = AP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; Х $\triangle CPH_1$: $CH_1 = CP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow CH_1 + AH_2 = 2{,}5a = \dfrac{\sqrt{3} \cdot AC}{2} = \sqrt{3} \cdot 15. \Rightarrow 4a = AD = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 15 \cdot 4}{2{,}5} = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot 8 = 24\sqrt{3} \Rightarrow S_{AED} = \dfrac{EH_2 \cdot AD}{2} =$
$= \dfrac{24\sqrt{3} \cdot 20}{2} = 480\sqrt{3}$ Ответ: $S_{AED} = 240\sqrt{3}$.

Черновик №4



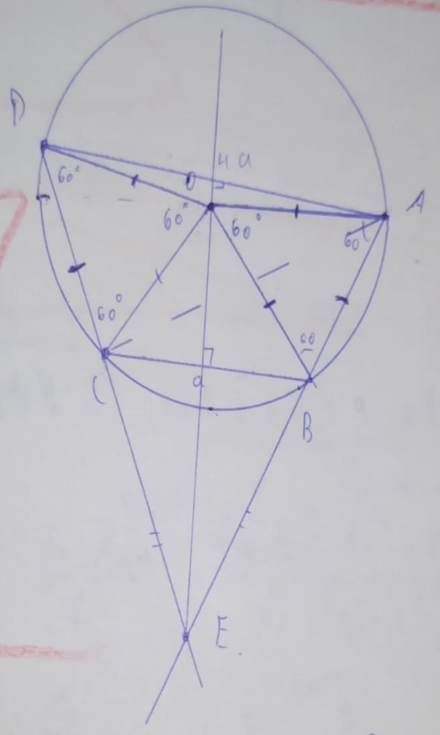
$\alpha = 60°$

$\angle C = 30.$

$p = 2$

$q = 3$

$2^7 - 3^? + 3 = 2^7$



ABCD – вписанная трапеция =>

=> AB = DC = R

⇓

$\angle CDA = \angle DAB$ =>

=> $\triangle AED$ – р/б. =>

=> BE = CE

№1 $\left[\begin{array}{l} q = 2 \\ p = 2 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r} + \; 2043231 \\ 2041210 \\ \hline 3084441 \end{array}$$

~~101~~

$$\begin{array}{r} \times \; 2021 \\ 1010 \\ \hline 2021 \\ 2021 \\ \hline 2041210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \; 2021 \\ 1011 \\ \hline 2021 \\ 2021 \\ 2021 \\ \hline 2043231 \end{array}$$

Черновик 3.

№3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

1) $p = 2$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q + 1 = q^2$

$q = 3$

1

1 4

1 20

100.

107.

$2 | q = 2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$.

6 19

6 95

№5

П о к о р и В о р о б ь Ё в ы г о р ы.

П - 1
О - 5
К - 1
Р - 2
И - 1
В - 2
Б - 1
Ь - 1
Ё - 1
Ы - 2
Г - 1.

11 букв.

n	кол-во
5	1
2	3
1	7.

1) 5 → 3. I II вариант

III

1. 3 → 0 | 2 → 1 → повторяем.

2. 3 → 1. | ~~2 → 1~~ 2 → 0 → повторяем

3. 3 → 2 | 1 → 0 повторяем.

4. 2 → 1 | 3 → 2 повторяем

5. 2 → 0 | 3 → 1 повторяем

6. 1 → 0 | 3 → 2 повторяем.

Чорновик 2.

№4 $b_1 = 2^7 = 2^7$

$b_2 = 1 = 2^0$

$b_3 = 2 = 2^1$

$b_4 = 16 = 2^4$

$b_5 = 512 = 2^9$

Z

$b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3$

$b_4 \cdot 1 = 2 \cdot 8$

$b_4 = 16$

$b_5 \cdot b_3^3 = b_2 \cdot b_4^3$

$b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^{12}$

$b_5 = 2^9 = 512$

$b_6 = \frac{2 \cdot (2^9)^3}{b_4^3} =$

$b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3}$

1 3 6 10 … …

1 3

$b_5 = \frac{b_2 \cdot b_4^3}{b_3^3} = \cancel{\frac{b_2 \cdot b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3 \cdot b_3}} = \frac{b_1}{b_3^3}$

$\frac{i \cdot (i+1)}{2}$ – сумма і-чисел.

$n=4$

$$\boxed{b_i : \begin{cases} b_1 \overset{i=1}{=} \frac{(n-3)(n-2)}{2} \\ b_3 \overset{i=2}{=} \frac{(n-2)(n-1)}{2} \end{cases}}$$

$= \frac{b_2 \cdot b_1^3 \cdot b_3^9}{b_2^9 \cdot b_3^3} = \frac{b_1^3 \cdot b_3^6}{b_2^8}$

$$b_{2023} \begin{cases} b_1 = \frac{2020 \cdot 2021}{2} \\ b_3 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} \end{cases}$$

$b_6 = \frac{b_3 \cdot (b_5)^3}{b_4^3} = \frac{b_3 \cdot b_1^9 \cdot b_3^{18} \cdot b_2^6}{b_2^{24} \cdot b_1^3 \cdot b_3^9} = \frac{b_3^{10} \cdot b_1^6}{b_2^{18}}$

$b_4 = \frac{b_1 \, b_3^3}{b_2^3}$

$b_5 = \frac{b_1^3 \, b_3^6}{b_2^8}$

$b_6 = \frac{b_1^6 \, b_3^{10}}{b_2^{18}}$

~~$i = 5$~~

$b_1 : 1 \to 3 \to 6 \to 10 \to 15$.

~~сумма і чисел~~.

~~$b_2 : 3 \to 8 \to 18 \to 33$~~

~~$n-2$ ...~~

$b_3 : 3 \to 6 \to 10 \to 15 \to 21$ сумма і-2 эл.

i 4 5 6 7 8.

~~1 2 3~~

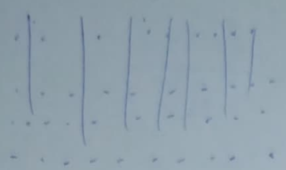
n	i_1	i_3
4	1	2
5	2	3.

$b_7 = \frac{b_4 \cdot b_6^3}{b_5^3} = \frac{b_1 \cdot b_3^3 \cdot b_1^{18} \cdot b_3^{30} \cdot b_2^{24}}{b_2^3 \cdot b_2^{54} \cdot b_1^9 \cdot b_3^{18}} = \frac{b_1^{10} \cdot b_3^{15}}{b_2^{33}}$

$b_8 = \frac{b_5 \cdot b_7^3}{b_6^3} = \frac{b_1^3 \cdot b_3^6 \cdot b_1^{30} \cdot b_3^{45}}{b_1^{18} \cdot b_3^{30}} = \frac{b_1^{15} \cdot b_3^{21} \cdot b_2^{54}}{b_2^8 \cdot b_2^{99}}$

Черновик 1.

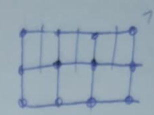
№2.



230 вершин.

~~229~~ =

12 верш.



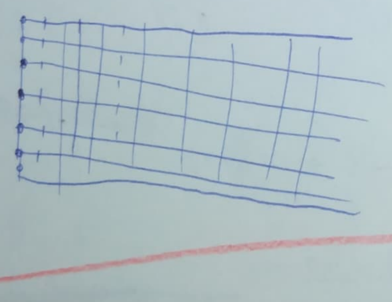
~~207~~

$\boxed{9 \cdot 23 + 22 \cdot 10}$ ребер.

$220 + 207 = 427$

Мы хотим перекрыть максимальное число дорог. Для этого мы должны в нашем графе избавиться от циклов не избавляясь от связности. То есть получить дерево. т.к. в дереве с n вершинами n-1 ребро, то в ~~н~~ нашем городе ~~от~~ ~~может~~ должно остаться хотя бы 229 дорог. Значит убрать нужно будет $\boxed{}$ - 229 дорог.

Пример:



$$\begin{array}{r} 427 \\ -\,229 \\ \hline 198 \end{array}$$