Чистовик

0 222459 000008

22-24-59-00
(140.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Челябинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бовсуна Тимофея Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
22-24-59-00	112	21	21	21	21	14	14	X	X

Оценка: 90 (девяносто)

90(девятая) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

22-24-59-00 (140.1)

Чистовик

1	2	3	4	5	6

Задача 1

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

2^{p-1} – чётное, т.к. $p \geq 2$ (значит $2^{p-1} \vdots 2$) $\Rightarrow p^q - q^p + 3$ – ~~н~~чётное $\Rightarrow p^q - q^p$ – нечётное, значит или $p^q \vdots 2$ или $q^p \vdots 2$.

1) $p^q \vdots 2 \Rightarrow p = 2$, т.к. остальные простые числа нечётны

$2^q - q^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow 2^q - q^2 = -1$.

Докажем, что при $q \geq 3$ последовательность $\{2^q - q^2\}$ возрастающая, т.е. ~~[illegible]~~ для $\forall q \geq 3$:

$2^q - q^2 < 2^{q+1} - (q+1)^2 \Leftrightarrow (2^{q+1} - 2^q) - ((q+1)^2 - q^2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^q - 2q - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^q > 2q + 1 \quad (*)$

Докажем неравенство $(*)$ по индукции:

База $q = 3$: $2^3 = 8 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$

Переход: Пусть $(*)$ верно для $q = k$, докажем что оно верно и для $q = k+1$:

$2^k > 2k + 1 \overset{(\times 2)}{\Rightarrow} 2^{k+1} > 4k + 2 = 2(k+1) + 1 + 2k - 1 > 2(k+1) + 1$,

т.к. $2k - 1 > 0$, ведь $k \geq 3$. Переход доказан.

Таким образом при $q \geq 3$ последовательность $\{2^q - q^2\}$ возрастает.

При $q = 2$: $2^q - q^2 = 2^2 - 2^2 = 0 \neq -1$

При $q = 3$: $2^q - q^2 = 2^3 - 3^2 = -1$ (подходит пара $(2;3)$)

При $q > 3$: $2^q - q^2 > 2^3 - 3^2 = -1$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Задача 1 (продолжение)

2) $q^p \vdots 2 \Rightarrow q = 2$, т.к. остальные простые числа нечётны

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \Leftrightarrow p^2 - 2^p - 2^{p-1} = -3 \Leftrightarrow p^2 - 3\cdot 2^{p-1} = -3 \Leftrightarrow$

~~При $p=2$: $p^2 - 2^p + 3 = 2^2 - 2^2 + 3 = 3 \neq 2^{p-1}$~~

~~При $p > 2$: $(p;2) = 1$ (т.к. p — простое и $p \neq 2$), значит по Малой теореме Ферма $2^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$, т.е.~~

~~$p^2 - 2^p + 3 \underset{p}{\equiv} 1 \Leftrightarrow -2^p + 3 \underset{p}{\equiv} 1 \Leftrightarrow -2^p + 2 \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow -2^p + 2 \vdots p \Leftrightarrow 2(1 - 2^{p-1}) \vdots p \Leftrightarrow 2^{p-1} - 1 \vdots p$~~

$\Leftrightarrow \frac{p^2}{3} - 2^{p-1} = -1$.

Т.е. $\frac{p^2}{3}$ — целое, значит $p^2 \vdots 3 \Leftrightarrow p = 3$, т.к. p — простое.

Проверим

$p^2 - 2^p + 3 = 3^2 - 2^3 + 3 = 4 = 2^{p-1}$

(подходит пара $(3; 2)$)

Итого равенство $p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$ выполнено для двух пар:

$(p; q) = (2; 3)$

$(p; q) = (3; 2)$

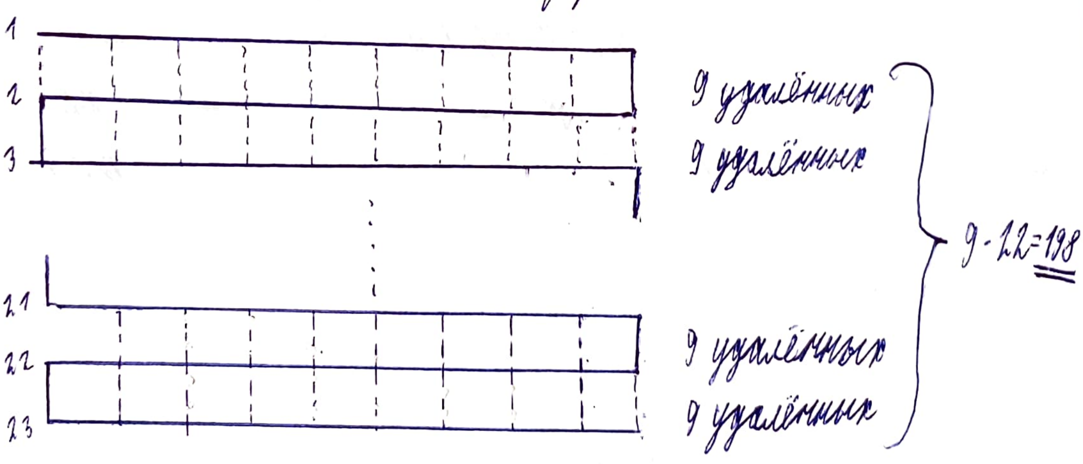
Ответ: $(p; q) = (2; 3)$ и $(p; q) = (3; 2)$

Чистовик

Задача 2

Представим город в виде графа, где перекрёстки — вершины, дороги между соседними перекрёстками — рёбра. В этом графе $10 \cdot 23 = 230$ вершин. Требуется, чтобы при удалении максимального числа дорог граф остался связным. Очевидно, что в таком случае граф будет деревом (иначе в нём останется цикл и тогда можно будет удалить ещё хотя бы одно ребро, не утратив связности). Т.е. в графе должно остаться хотя бы 229 ~~дорог~~ рёбер (число рёбер в дереве на 230 вершинах). Изначально в графе было $10 \cdot 22 + 9 \cdot 23 = 427$ рёбер. Значит максимум на ремонт можно закрыть $427 - 229 = 198$ дорог (оценка).

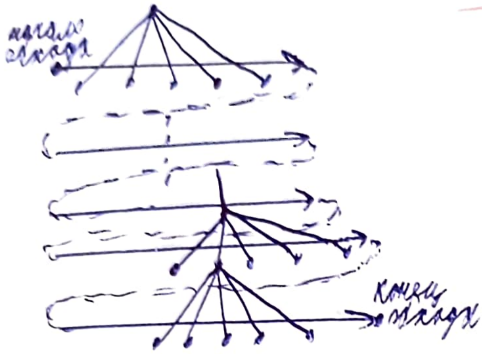
Пример (на 198 удалённых дорог):



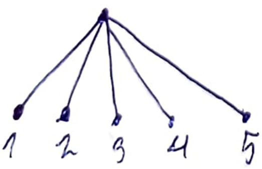
Ответ: 198

Задача 3. Чистовик

Представим пакеты как ориентированные подвешенные деревья, в которых рёбра идут от пакета только к вложенным в него напрямую (если они существуют). Дерево подвешено за первый пакет.



В таком дереве 101 лист (т.к. пустых пакетов 101). Давайте ~~создадим счётчик cnt~~ обходить это дерево в ширину (т.е. по уровням сверху вниз (направление показано на рисунке выше)) начиная со второго уровня. Создадим счётчик cnt, ~~ш.~~ который изначально равен 5. Этот счётчик хранит значение кол-ва листов в дереве, состоящем из уже пройденных в обходе вершин и их потомков (первый пакет сразу считаем пройденным). Начальное состояние такого дерева:



cnt = 5

~~Как~~ При прохождении в обходе очередной вершины прибавляем к cnt 4, если она имеет потомков. (Прибавляется 4, т.к. вершина перестаёт быть листом, но добавляется 5 новых листов). И оставляем значение cnt таким же, если у пройденной вершины нет потомков (т.к. состояние дерева осталось таким же).

Задача 3 (продолжение) Чистовик

После окончания обхода cnt = 101, т.к. пройдено всё дерево, а в нём 101 лист. Значит по 4 к cnt добавлялось $\frac{101-5}{4}$ = (прибавление происходит в не листах) 24 раза. Тогда всего вершин, считая корень дерева и листы:

$24 + 1 + 101 = 126$

не корень и не листы, корень, листы

Т.е. всего было 126 пакетов.

Ответ: 126

Чистовик

Задача 4

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$; $b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2$

Докажем по индукции, что $b_n = 2^{a_n}$, где $a_n \in \mathbb{Z}$,

База: $b_1 = 2^1$; $b_2 = 2^0$; $b_3 = 2^1$, т.е. $a_1 = 1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 1$

Переход: Пусть $b_{k-3} = 2^{a_{k-3}}$, $b_{k-2} = 2^{a_{k-2}}$ и $b_{k-1} = 2^{a_{k-1}}$, тогда $b_k = 2^{a_k}$. Докажем это:

$b_k \cdot b_{k-2}^3 = b_{k-3} \cdot b_{k-1}^3 \Leftrightarrow b_k = \frac{b_{k-3} \cdot b_{k-1}^3}{b_{k-2}^3} =$

$= \frac{2^{a_{k-3}} \cdot (2^{a_{k-1}})^3}{(2^{a_{k-2}})^3} = 2^{a_{k-3}+3a_{k-1}-3a_{k-2}}$, т.е. $\underline{a_k = a_{k-3} + 3a_{k-1} - 3a_{k-2}}$

Переход доказан.

Таким образом последовательность $\{b_n\}$ - это последовательность каких-то степеней 2.

Зададим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \log_2 b_n$ (или же $b_n = 2^{a_n}$), тогда:

$a_k = a_{k-3} + 3a_{k-1} - 3a_{k-2}$.

~~При этом~~

$\cancel{a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1}$

Докажем по индукции, что $a_n = (n-2)^2$.

База: $a_1 = 1 = (-1)^2$; $a_2 = 0 = 0^2$; $a_3 = 1 = 1^2$.

Переход: Пусть $a_{k-3} = (k-5)^2$; $a_{k-2} = (k-4)^2$; $a_{k-1} = (k-3)^2$, тогда $a_k = a_{k-3} + 3a_{k-1} - 3a_{k-2} = (k-5)^2 + 3(k-3)^2 - 3(k-4)^2 =$

$= (k^2 - 10k + 25) - 3(k^2 - 8k + 16) + 3(k^2 - 6k + 9) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2$

Переход доказан.

Значит $a_{2023} = (2023-2)^2 = 2021^2$ и $b_{2023} = 2^{a_{2023}} =$

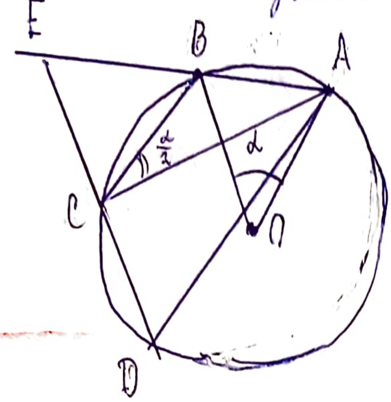
$= 2^{2021^2} = 2^{4084441}$

Ответ: $b_{2023} = 2^{4084441}$

22-24-59-00
(140.1)

Задача 6

Чистовик



Дано: $AD \parallel BC$

$4BC = AD$

$AC = 30$

$\alpha = 60^\circ$

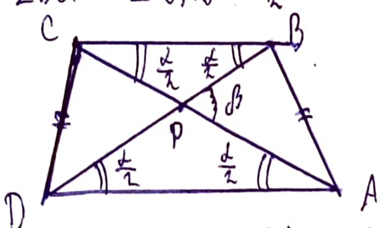
Найти: $S_{\triangle AED}$ — ?

Решение:

$\angle BCA = \angle CAD \overset{}{=} \frac{\alpha}{2}$ (т.к. $AD \parallel BC$, а AC — секущая), т.е. угловые величины дуг $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$ равны $\Rightarrow AB = CD$

~~ABCD - трапеция~~

$ABCD$ — равнобокая трапеция $\Rightarrow AC = BD \overset{30}{=}$ и $\angle CBD = \angle BDA =$
$= \angle BCA = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$



$\beta = \angle PDA + \angle PAD = \alpha$ (как внешний угол $\triangle PDA$).

$S_{ABCD} = AC \cdot BD \cdot \sin\beta = 30 \cdot 30 \cdot \sin 60^\circ = 450\sqrt{3}$

$AD \parallel BC \Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}} = k^2 = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = 4^2 = 16.$

коэффициент подобия

$S_{ABCD} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AED} - \frac{1}{16} S_{\triangle AED} \Rightarrow S_{\triangle AED} = \frac{16}{15} S_{ABCD} =$
$= \frac{16}{15} \cdot 450\sqrt{3} = 480\sqrt{3}$

Ответ: $S_{\triangle AED} = 480\sqrt{3}$

Задача 5 Чистовик

При правильной игре побеждает Алиса.

~~Изменим~~ Переформулируем правила игры.

Для начала посчитаем число ~~различных~~ вхождения каждой буквы в надпись:

П − 1, К − 1, И − 1, Б − 1, Ь − 1, Е − 1, Г − 1, В − 2, Ы − 2, Р − 3, О − 5

По сути, когда удаляется несколько (пусть x) одинаковых букв, от числа, соответствующего этой букве вычитается x. Т.е. иначе говоря, изначально есть набор чисел:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 5

За ход можно вычесть от одного из чисел некоторое положительное значение (так чтобы число осталось неотрицательным). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Будем считать, что если число становится равным 0, то оно ~~буквы~~ исчезает.

Цель Алисы — сохранять ~~а чётное число чисел больших единиц~~ чётное число единиц после каждого своего хода. Она может это делать следующим образом: первым ходом превращаем в 1). Затем Если после хода Бори:

1) Осталось чётное число единиц, то Боря вычел что-то из числа $x > 1$ и получил число ~~...~~

а) $x' > 1$, то есть $x = 3$, $x' = 2$

Черновик

$b_1 = 2^1$

$b_2 = 2^0$

$b_3 = 2^1$

$b_4 = 2^4$

$b_5 = 2^2$

16

25

36

$a_n + 3a_{n-2} = a_{n-3} + 3a_{n-1}$

$a_n = a_{n-3} + 3a_{n-1} - 3a_{n-2}$

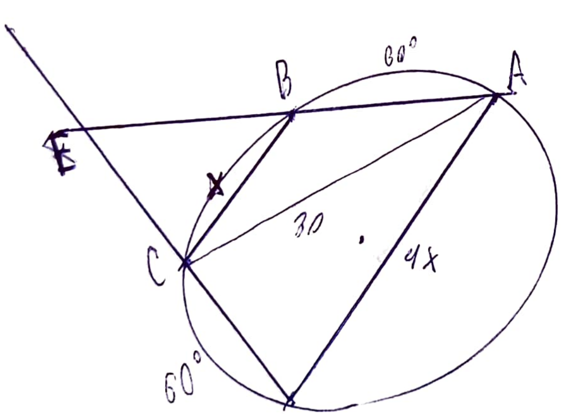
$b_4 \cdot 1^3 = 2 \cdot 2^3$

$b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot (2^4)^3$

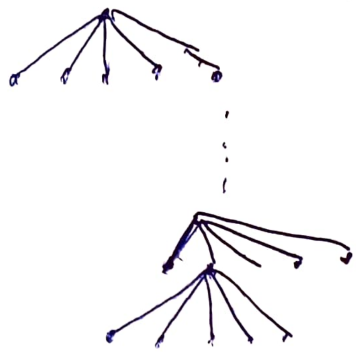
$= a_{n-3} + a_{n-1} + 3a_{n-2} - 3a_{n-3}$

$(n-2)^2 = (n-5)^2 + 3(n-3)^2 - 3(n-4)^2$

$EB = CE$



Черновик



(10 1 лист, из вершины вниз или 5 рёбер или ни одного)

~~и~~ Запустим обход в ширину (bfs), счётчик cnt = 5, для каждой вершины +4 в cnt в случае если она не лист.

$x \cdot 1^3 = 2 \cdot 2^3$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$ $\quad 2^4$

$\frac{b_{n-1}^3}{b_n} = \frac{b_{n-2}^3}{b_{n-3}}$

$b_n \cdot 1 =$

П – 1
О – 5
К – 1
Р – 3
И – 1

В – 2
Б – 1
Ь – 1
Е – 1
Ы – 2
Г – 1

$CP \cdot DP \cdot \sin\beta + BP \cdot AB \cdot \sin\beta +$

$+ DB \cdot PA \cdot \sin\beta + CP \cdot BP \cdot \sin\beta$

Черновик

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

~~при учёте~~ 2^{p-1} – чётное

$p^q - q^p$ – нечётное

p или q – чётное (2)

1) $p = 2$:

$2^q - q^2 + 3 = 2 \Rightarrow q = 3$: $8 - 9 + 3 = 2$ +

2) $q = 2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$ – $(2, p) = 1 \Rightarrow 2^{p-1} \equiv_p 1$ (МТФ)

$p^2 - 2^p + 3 \equiv_p 1$ $\quad p^2 - 2^{p-1} = -3$

$3 - 2^p \equiv_p 1 \Rightarrow 2 - 2^q \equiv_p 0$ $\quad (2 - 2^q) \vdots p$

$(2^q - q^2) < (2^{q+1} - (q+1)^2) = 2^{q+1} - q^2 - 2q - 1$

$2^q - 2q - 1 > 0$

$2^q > 2q + 1$

(истина) при $q \geq 3$)

$\{2^q - q^2 + 3\}$ – возрастающая

2021
2021
2021
4042
4042
4084441

2021
2021
2024