Выход $13^{16}$ – $13^{19}$ Зоол

0190270620005

19-02-70-62
(117.2)

дешифр

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Беляковa Александра Павловна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ~~7~~ | ~~8~~ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19-02-70-62 | 91 | 21 | 0 | 21 | 21 | 21 | 7 | X | X |

91 (девяносто один)



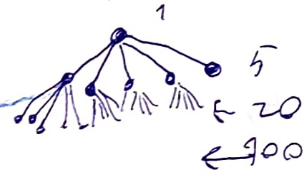
19-02-70-62 (117.2)

Чистовик №1

## №1

Решение: представим наш пакет в виде графа, пусть пакеты являются вершинами, а ребро выходящее из него значает, что в нем лежат другие пакеты, например для какого-то непустого пакета схема такова: . Подсчитаем количество рёбер 2 способами и составим уравнение, обозначив непустые пакеты за $n$.

Таким образом, с одной стороны, кол-во рёбер равно $101+n-1$ т.к это дерево (мы считаем ребра снизу вверх, действительно, каждый пакет содержится ровно в одном (кроме первого). А с другой это количество $n \cdot 5$ т.к только от непустых отходят ребра вниз. Значит $5n = 101+n-1$, $n=25$, складываем пустые и непустые, получаем 126. Это — единственный ответ, т.к количество рёбер однозначно определяется по условию задачи через уравнение, также, такой ответ возможен, т.к есть пример:




итого, 101 непустой, 100 на 4-м уровне, 1 на 2-м и всего 126 пакетов.

Ответ: 126 пакетов.

## №3

Решение: перенесем 3 на другую сторону и получим: $p^q - q^p = 2^{p-1} - 3$; $2^{p-1}$ — четное, т.к $p > 1$, 3 нечетное, а значит их разность нечетна. Значит $p$ и $q$ не могут оба быть нечетны, но 1 из них четное, единственное четное простое число 2. Пусть $p=2$, тогда $2^q - q^2 = 2^1 - 3 = -1$, значит $2^q - q^2 = -1$, такое возможно, если $q=3$ т.к $2^3 - 3^2 = -1$, и только если, ведь если мы построим 2 графика $y = 2^x$ и $y = x^2$, то они будут возрастать по-разному (графики $2^x$ — значительно быстрее), и это единственное решение, если $p=2$.
Если же $q=2$ то $p^2 - 2^p = 2^{p-1} - 3 \Rightarrow p^2 = 3(2^{p-1}-1)$, очевидно, что если $p^2$ содержит множитель 3, то $p =$ только трем (простое число), и это возможно: $3^2 = 3(2^{3-1}-1)$

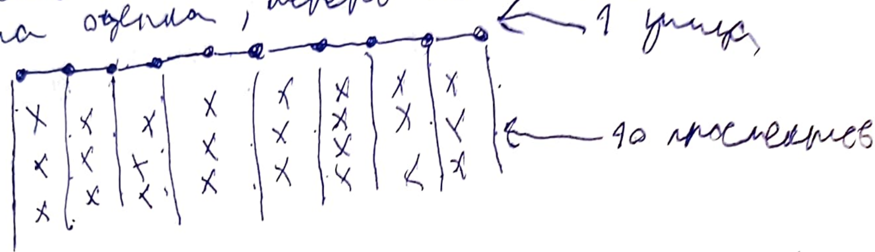
Ответ: $p=2, q=3$; $p=3, q=2$.

№ 4

$\boxed{\text{Чистовик №2}}$

Решение: представим город в виде графа: перекрестки — вершины, а участки улиц между перекрестками — ребра. У нас получилась сетка из 70 вершин. Посчитаем сколько в ней ребер: $4 \cdot x$ (угловые со смежными вершинами) $+ (21+18) \cdot 3 \cdot x + 21 \cdot 2 \cdot x$ ребер!

Итого $336 + 87 + 4 = 427$ ребер. Дерево — связный граф с минимальным возможным числом ребер (вершин − 1), значит после закрытия максимального числа у нас останется $230 - 1 = 229$ ребер, вычитаем $427 - 229$ и получаем 198 закрытых. Это была оценка, теперь пример:




мы полностью закрыли 22 улицы по 9 участков 198, оценка совпала с примером.

Ответ: 198 участков.

№ 5

Решение: найдем $b_4$, $b_5$, $b_6$:

$b_4 \cdot 1^3 = 2 \cdot 2^3 \Rightarrow b_4 = 2^4$; $b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^{12} = 2^9$;

$b_6 \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27} = 2^{25}$. Заметим, что они являются $2^{(n-2)^2}$. Но почему и дальше это так?

Докажем по индукции, база $n = 4$, шаг 1. Итак пусть мы доказали для чисел не больших $n$, тогда $b_n = 2^{(n-2)^2} = \frac{2^{(n-5)^2} \cdot 2^{(n-3)^6}}{2^{(n-4)^6}}$ если раскрыть скобки, что это действительно так, теперь не равен $b_{n+1}$ (одинаково выразить $2^{(n-1)^2}$; проверим это через предыдущие: $b_{n+1} = \frac{2^{(n-2)^6} \cdot 2^{(n-4)^2}}{2^{(n-3)^6}} = \frac{2^{6n-12+2n-8}}{2^{6n-18}} = 2^{2n-2}$ т.е. как раз $\frac{2^{(n-1)^2}}{2^{(n-2)^2}}$. Это будет работать и дальше. Соответственно для $b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{(2021)^2} = 2^{4042}$

Ответ: $2^{4042}$.

Чистовик №3

№6

Решение: Это есть, для Алисы. Переформулируем задачу: есть 11 кучек, в 7 из них по одной спичке, в одной 5, в другой 3, еще в 2-х по две. За ход разрешается брать любое кол-во спичек из одной кучки. П. и А. ходят [illegible] нужно, чтобы за пару ходов Алиса-Петя кол-во кучек изменялось на 0 или 2, тогда Алиса забирает последнюю кучку и выигрывает.

Решение: Это есть, для Алисы. Переформулируем задачу: есть 11 кучек, в 7-и из них по 1 спичке, в 2-х по 2, в одной 3, и в последней 5. Первым ходом Алиса забирает все буквы "О" (кучку с 5 спичками). Далее: если Петя взял одну кучку, то и Алиса берет целую кучку (по аналогии для [illegible] т.е. Петя берет из одной - Алиса тоже, Петя из 2, Алиса тоже. Если же Петя каким-то образом взял одну из кучки с двумя, то мы берем одну из второй кучки с двумя (только ее взять не можем, т.к. испортим его ходы)! Если же Петя берет из кучки с тремя, то черновик:

$b_n \cdot (b_{n-2})^3 = b_{n-3} \cdot (b_{n-1})^3$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot (b_{n-1})^3}{(b_{n-2})^3}$

$b_{n+1} = \frac{b_{n-2} \cdot \frac{(b_{n-3})^3 \cdot (b_{n-1})^9}{(b_{n-2})^9}}{(b_{n-1})^3} = \frac{(b_{n-1})^3 \cdot (b_{n-3})^3}{(b_{n-2})^8}$

$\frac{b_n \cdot (b_{n-3})^2}{b(n-2)^5} = b_{n+1}$

$\frac{2^{(n-5)^3}}{2^{(n-4)^5}} = \frac{2^{2n-10}}{2^{5n-20}}$

$2^{2n-10+6n-18}$

$2^{2n-3}$ $2^{2n-4} = \frac{2^{8n-28}}{2^{6n-24}}$

$2^{(n-2)^2} = \frac{2^{(n-5)^2} \cdot 2^{(n-3)^6}}{2^{(n-4)^6}}$

$2^{(n-1)^2} =$ 

79

покори воробьевы горы

1 13 2 9 5 5 2 9 2 7 8 6 10 11 9 10

1 1 1 1 1 1 1 1111 111 11 11

$-\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{20}$ $-\frac{1}{412}$ ... $-\frac{1}{900}$.

A B

K

Черновик

$601 - p$

$601$ $20 \cdot 30$

$601 \mid 23$

$141$

$101 + 20$

$121$

$158$

$20$

$100$

20 камней

101 лист

101 прямой

3 знаки

~~101 +~~

$101 + 25$

$n + p - 1 = 5 \cdot n$

$p - 1 = 41$

$n = 25$

$4 \cdot x + 29 \cdot 2/3$

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^q + 3 = 2^{p-1} + q^p$

$p^q - q^p = 2^{p-1} - 3$

для различных

также ~~$p \neq 2$~~

пусть $p \geq 2$

$2 \cdot 30$

$2^3$

$2^x \cdot 9 - (x+2)^2$

$2^q + q^2 = 2 - 3$

$p^2 - 2^p = 2^{p-1} - 3$

$p^2 = 2^{p-1}(3) - 3$

$p^2 = 3(2^{p-1} - 1)$

$2^x + 2^x \cdot 3$

$-x^2 - 2x - 4 = 7$

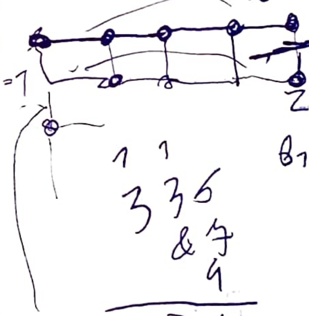
$2^x \cdot 3 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$2(2^{x-1} \cdot 3 - x - 2)$

$427$

$229$

$198$



$(b_{n-3})^3$

$(b_{n-1})^3$

$(b_{n-2})^3$

$b_1 - 3$

$336$

$27$

$b_4 \cdot 1 = 2 \cdot 2^3$

$b_5 \cdot 2 = 1 \cdot 2^{12}$

$b_6 \cdot 2^9 = 2 \cdot 2^{33}$

$b_7 \cdot 2^{30} =$

$b_4 = 2^{4}$

$b_5 = 2^{11}$

$b_3 = 2^{30}$

$$b_{n+1} = \frac{b_{n-2}\left(\frac{b_{n-3}(b_{n-1})^3}{(b_{n-2})^3}\right)}{(b_{n-1})^3}$$

$$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot (b_{n-1})^3}{(b_{n-2})^3}$$

$b_4 \cdot 1^3 = 2 \cdot 2^3$ $\quad b_4 = 2^4$

$b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^{12}$ $\quad b_5 = 2^9$

$b_6 \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27}$ $\quad b_6 = 2^{16}$

$n^2 - 4n + 4$

$2^{2n+1}$

$b_n = 2^{(n-2)^2}$

$2n - 3$

$b_{n+1} = 2^{(n-1)^2} = 2^{(n-2)^2} \cdot 2$