0 402730 690009

40-27-30-69
(138.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант С-2

Место проведения Челябинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Коваленко Евгения Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
40-27-30-69	85	20	20	20	20	0	5		

40-27-30-69 (138.2)

1	2	3	4	5	6	Σ

Чистовик

№1. $1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$.

Преобразуем правую часть уравнения:

$2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=2\cdot(1-\cos^2(x+\frac{\pi}{8}))=1+1-2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})=1-(2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})-1)=$

$=1-\cos(2x+\frac{\pi}{4})=1-(\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=$

$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2x-\sin^2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin x\cos x.$

Преобразуем левую часть уравнения:

$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=1-\sqrt{2}\sin x\cos x-$

$-2\sqrt{2}\cos^2x+2\sqrt{2}\sin^2x-\sqrt{2}\sin x\cos x=1-2\sqrt{2}\cos^2x+2\sqrt{2}\sin^2x-2\sqrt{2}\sin x\cos x.$

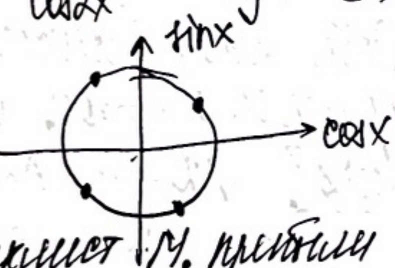
Приравняем преобразованные левую и правую части уравнения: $\cancel{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2x-\sin^2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin x\cos x=\cancel{1}-2\sqrt{2}(\cos^2x-\sin^2x)-$

$-2\sqrt{2}\sin x\cos x\Rightarrow -\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x=-4\cos^2x+4\sin^2x-4\sin x\cos x\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sin^2x-6\sin x\cos x-3\cos^2x=0\Rightarrow \sin^2x-2\sin x\cos x-\cos^2x=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2x-\sin^2x=-2\sin x\cos x\Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-1\Rightarrow tg 2x=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k\Rightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z.$



Ответ: $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z.$

№2. Пусть велосипедист В. и мотоциклист М. прибыли в пункт В через время t (после 13:00), S – расстояние между пунктами А и В, скорость движения велосипедиста $v_B=v$, тогда скорость движения мотоциклиста $v_M=2v$.

Рассмотрим 4 случая:

1) Велосипедист выехал на час раньше и сделал остановку, тогда для мотоциклиста справедливо равенство $\frac{S}{2v}=t$. В. двигался суммарно $t+1$ час (т.к. выехал на час раньше), из которых на движение со

скоростью v потратил $t+1ч-2ч=t-1ч$ | Чистовик
(т.к. сделал остановку продолжительностью 2 часа).
Тогда справедливо равенство $\frac{S}{v}=t-1ч \Rightarrow 2\cdot\frac{S}{2v}=t-1ч \Rightarrow$
$\Rightarrow 2t=t-1ч \Rightarrow t=-1ч<0ч$, что невозможно.

2) велосипедист выехал на час раньше, мотоциклист сделал остановку: тогда мотоциклист потратил на дорогу t часов, из которых $2ч$ не двигался $\Rightarrow \frac{S}{2v}=t-2ч$,
а также $t+1ч=\frac{S}{v}=2\cdot\frac{S}{2v}=2t-4ч \Rightarrow \boxed{t=5ч} \Rightarrow$ они прибыли в 18:00

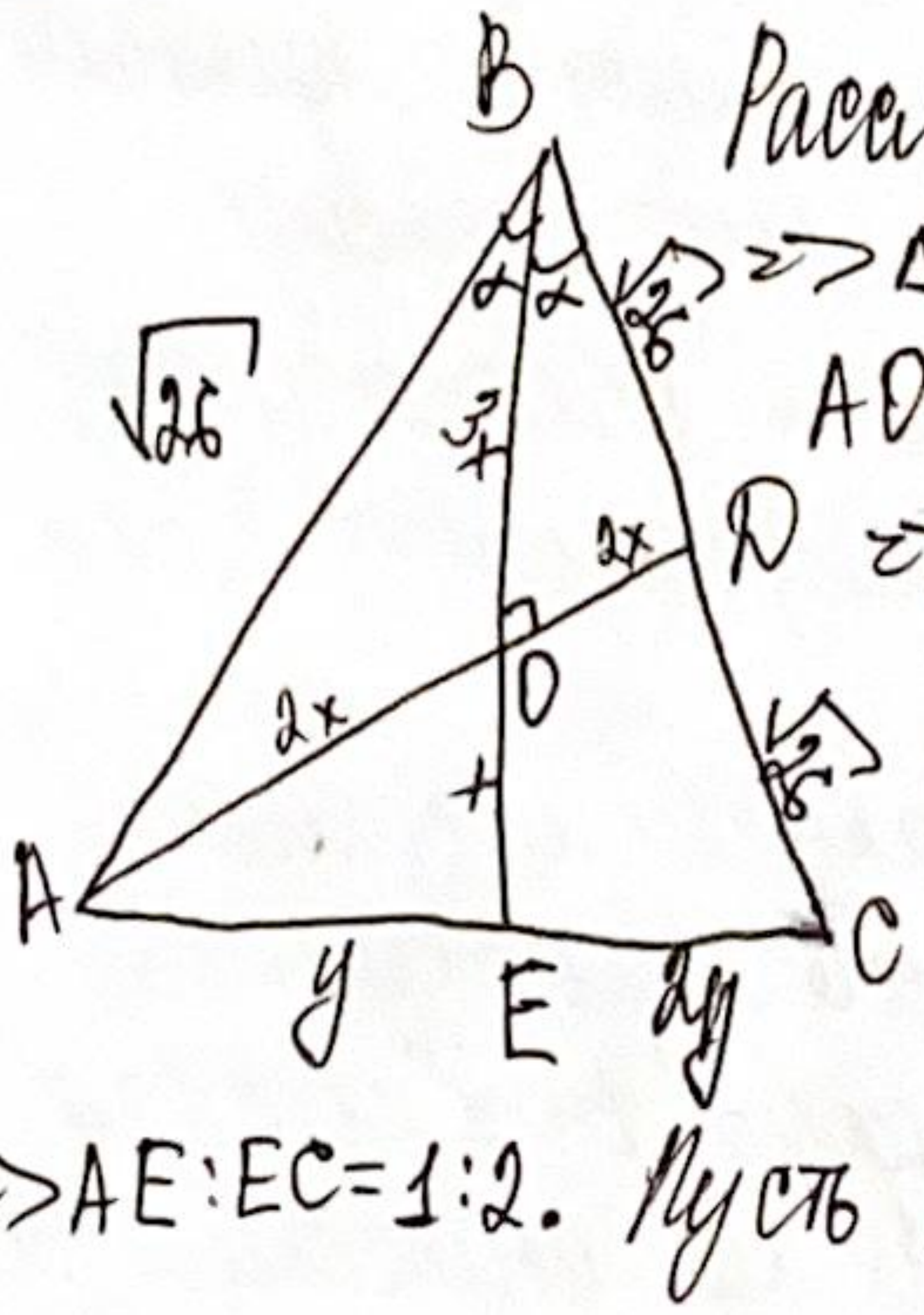
3) мотоциклист выехал на час раньше и сделал остановку: тогда мотоциклист потратил на дорогу $t+1ч$, из которых $2ч$ отдыхал $\Rightarrow t+1ч-2ч=\frac{S}{2v}=t-1ч$. Для В. верно равенство $t=\frac{S}{v}=2\cdot\frac{S}{2v}=2t-2ч \Rightarrow \boxed{t=2ч} \Rightarrow$ они прибыли в 15:00.

4) мотоциклист выехал на час раньше, велосипедист сделал остановку: тогда для М.: $t+1ч=\frac{S}{2v}$, для В.: $\frac{S}{v}=t-2ч$
$\Rightarrow 2\cdot\frac{S}{2v}=2t+2ч \Rightarrow t=-4ч<0ч$, что невозможно.

Тогда остановку точно сделал мотоциклист.

Ответ: если велосипедист выехал на час раньше, то они прибыли в 18:00, иначе — в 15:00.

№4. $AD=BE$, $AD\perp BE$, $AB=\sqrt{26}$. S_{ABC} — ? Пусть $AD\cap BE=O$.



Рассмотрим $\triangle ABD$: BO — бис-са и высота $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow BD=AB=\sqrt{26}$, $AO=OD$. Т.к. AD — медиана, то $BD=DC \Rightarrow$
$\Rightarrow DC=\sqrt{26}$. Пусть $AD=4x$, тогда $AO=OD=2x$
По теореме Менелая для $\triangle ADC$ и секущей BE: $\frac{BO}{OE}\cdot\frac{AE}{\cancel{E}CA}\cdot\frac{CD}{DA}=1$.
По теореме о биссектрисе $AE:EC=AB:BC$
$\Rightarrow AE:EC=1:2$. Пусть $AE=y$, тогда $EC=2y$. Тогда

40-27-30-69
(138.2)

$\frac{BO}{OE}\cdot\frac{y}{3y}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=1 \Rightarrow BO=3OE \Rightarrow BE=BO+OE=4OE$. $BE=AD=4x \Rightarrow$
$\Rightarrow OE=x$ и $BO=3x$. Т. Пифагора для $\triangle AOB$: $9x^2+4x^2=26 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\sqrt{2}$. Пусть $\angle ABE=\alpha$, тогда $\angle CBE=\alpha$ (т.к. BE-бис-са);
также $\sin\alpha=\frac{AO}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

Чистовик

$\Rightarrow \sin\angle ABC=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{12}{13}$.

Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{26}\cdot\cancel{2}\sqrt{26}\cdot\frac{12}{13}=$
$=\frac{2\cdot\cancel{13}\cdot 12}{\cancel{13}}=24$.

Ответ: 24.

№3. x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3+6x^2+7x+1=0 \Rightarrow$
по т. Виета ~~в~~ можно записать следующую
систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$$

$(x_1+x_2), (x_2+x_3), (x_1+x_3)$ – корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a=(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_1+x_3)=2(x_1+x_2+x_3)=-12 \Rightarrow \boxed{a=12}$;

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_1+x_3)(x_2+x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+$
$+x_1^2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+$
$+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=36+7=43 \Rightarrow \boxed{b=43}$;
$-c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=(-6-x_3)(-6-x_1)(-6-x_2)=-(6+x_1)(6+x_2)(6+x_3)=$
$=-(36+6x_1+6x_2+x_1x_2)(6+x_3)=-(216+36x_1+36x_2+6x_1x_2+36x_3+6x_1x_3+$
$+6x_2x_3+x_1x_2x_3)=-(216+36(x_1+x_2+x_3)+6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+x_1x_2x_3)=$
$=-(216+36\cdot(-6)+6\cdot 7-1)=-(\cancel{216}-\cancel{216}+42-1)=-41 \Rightarrow \boxed{c=41}$

Ответ: $a=12$, $b=43$, $c=41$.

№6. $1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$. $\sigma(N)$-кол-во делителей.
$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^2$. $\sigma(N^3)$-?

Чистовик

Пусть у числа N k делителей: $p_1, \ldots, p_k$. Тогда у числа N^2 следующие делители, которые получаются путём перемножения делителей p_i и p_j друг на друга и удалением „дубликатов" делителей:

- перемножение p_1: $1 = p_1^2, p_1p_2, \ldots, p_1p_k = N$ — k шт.
- перемножение p_2: $\underbrace{p_1p_2}_{\text{есть при перемножении } p_1}, p_2^2, p_2p_3, \ldots, p_2\overset{=N}{p_{k-1}}, p_2p_k$ — $k-2$ шт.
- перемножение p_3: $\underbrace{p_1p_3}_{\text{есть}}, \underbrace{p_2p_3}_{\text{есть}}, p_3^2, \ldots, \underbrace{p_3\overset{=N}{p_{k-2}}}_{\text{есть}}, p_3p_{k-1}, p_3p_k$ — $k-3$ шт.

⋮

- перемножение p_k: $\underbrace{p_1p_k}_{\text{был}}, \ldots, \underbrace{p_{k-1}p_k}_{\text{были}}, \underbrace{p_k^2}_{\text{был}}$ — 1 шт.

Тогда у N^2 получаем $k + (1 + \ldots + (k-2)) = k + \frac{(k-2)(k-1)}{2} =$
$= \frac{2k + k^2 - 3k + 2}{2} = \frac{k^2 - k + 2}{2}$ делителя

Делители числа N^2 поставим (отсортируем) так, чтобы сначала шли отсортированно делители числа N, а потом — получим, что $\sigma(N^3) = \frac{(k-1)(k^2-k+2)}{2}$

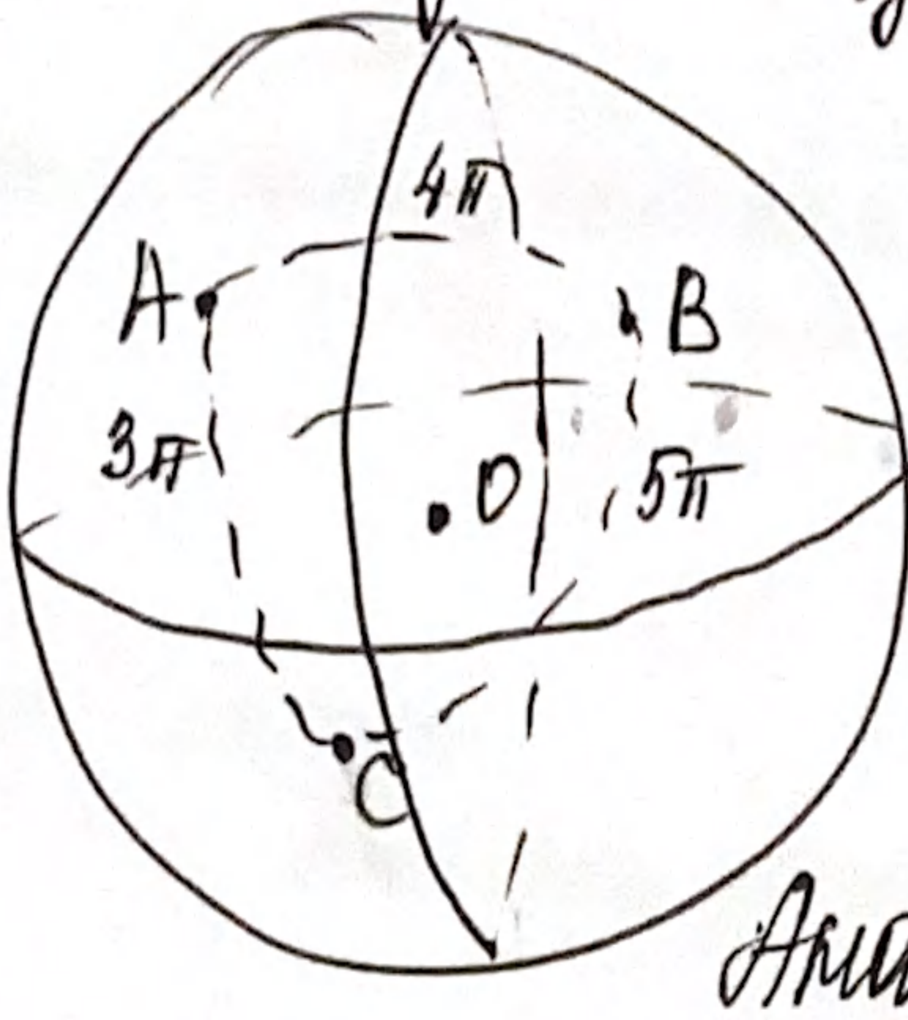
У числа N хотя бы 1697 делителей, т.е. $k \geq 1697$.

Если $k > 1699$, то $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} p_{1697} < p_3 \cdot p_4 \cdot \frac{N}{p_4} \cdot \frac{N}{p_3} = N^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \in \{1697; 1698; 1699\}$.

Тогда $\sigma(N^3)$ может быть равно $1696^3 - 1$ (например, для $N = 2^{1696}$), $1697^3 - 1$ ($N = 2^{1697}$), $1698^3 - 1$ ($N = 2^{1698}$)

40-27-30-69
(138.2)

№5. Пусть O – центр сферы, R – радиус. Тогда $\angle AOB$ лежит в сечении шара, проходящем т. A, B, O и являющимся кругом, значит, $\smile AB = 2\pi R \cdot \frac{\angle AOB}{2\pi} = 4\pi \Rightarrow \angle AOB = \frac{4\pi}{R}$.



Аналогично $\angle AOC = \frac{3\pi}{R}$, $\angle BOC = \frac{5\pi}{R}$.

$AB = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\angle AOB} = R\sqrt{2 - 2\cos\angle AOB}$ по т. косинусов, аналогично $BC = R\sqrt{2-\cos\angle BOC}$, $AC = R\sqrt{2-\cos\angle AOC}$,

т.е. $p = R\left(\sqrt{2-2\cos\frac{3\pi}{R}} + \sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{R}} + \sqrt{2-2\cos\frac{5\pi}{R}}\right) =$

$= R\left(\sqrt{2-2\cos^2\frac{3\pi}{2R}+2\sin^2\frac{3\pi}{2R}} + \sqrt{2-2\cos^2\frac{2\pi}{R}+2\sin^2\frac{2\pi}{R}} + \sqrt{2-2\cos^2\frac{2,5\pi}{R}+2\sin^2\frac{2,5\pi}{R}}\right)$

$= 2R\left(\sin\frac{1,5\pi}{R} + \sin\frac{2\pi}{R} + \sin\frac{2,5\pi}{R}\right)$ (из-под корня извлекаем синус без модуля, т.к. в случае наименьшести дуг все углы не больше $180°$).

Черновик

$$p = 2R\left(\sin\frac{1,5\pi}{R} + \sin\frac{2\pi}{R} + \sin\frac{2,5\pi}{R}\right)$$

$$p' = 2\left(\sin\frac{1,5\pi}{R} + \sin\frac{2\pi}{R} + \sin\frac{2,5\pi}{R}\right) + 2R\left(\cos\frac{1,5\pi}{R}\cdot\frac{1,5\pi}{R^2} + \cos\frac{1,5\pi}{R}\cdot\frac{2\pi}{R^2} + \cos\frac{2,5\pi}{R}\cdot\frac{2,5\pi}{R^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\sin\frac{1,5\pi}{R} - \frac{1,5\pi}{R}\cos\frac{1,5\pi}{R}\right)$$

$\cancel{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots}$

$\sigma(N)$ $\quad N - \sigma(N)$ $\quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$\cancel{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)}$ $\quad (1 + \ldots + x_1^{\alpha_1+1})(1 + \ldots + x_2^{\alpha_2+1})$

$\boxed{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)} = \sigma$ $\quad x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{2\alpha_n}$

$(1+3\alpha_1)\ldots(1+3\alpha_n) =$

$\frac{2^2 - 2 + 2}{2}$ $\quad 1 \quad 2 \quad 4$

1
3
9
27
81

$\frac{4^2 - 4 \cdot 2}{2}$ $\frac{14}{2}$

$\cancel{(1+2\alpha_1)}$

Черновик

$0=(x-1)(x-2)(x-3)$: корни $1,2,3$;

$0=(x^2-3x+2)(x-3)=x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6=x^3-6x^2+11x-6=0$ (a, b, c)

$x_1+x_2+x_3=6=-a$; $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=2+6+3=11=b$

$x_1x_2x_3=-c$

По т. Виета

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=-a\\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\\ &x_1x_2x_3=-c \end{aligned}}$$

$(cf(x))'=c\cdot f'(x)+0\cdot f(x)=cf'(x)$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-\frac{1}{x^2}$

$x_1+x_2+x_3=-6$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

$x_1x_2x_3=-1$

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_1+x_3=2(x_1+x_2+x_3)=-12=-a$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$

$2-2\cos\frac{5\pi}{R}=2-2\cos$ … $4\sin^2\frac{5\pi}{R}$ … $2\sin^2\frac{5\pi}{R}$

$=x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+$

$+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+(x_1+x_2+x_3)^2=43=b$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$ ~~$(x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1+x_3)=$~~ … $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_3x_2^2+x_1x_3^2+x_2x_3^2=$

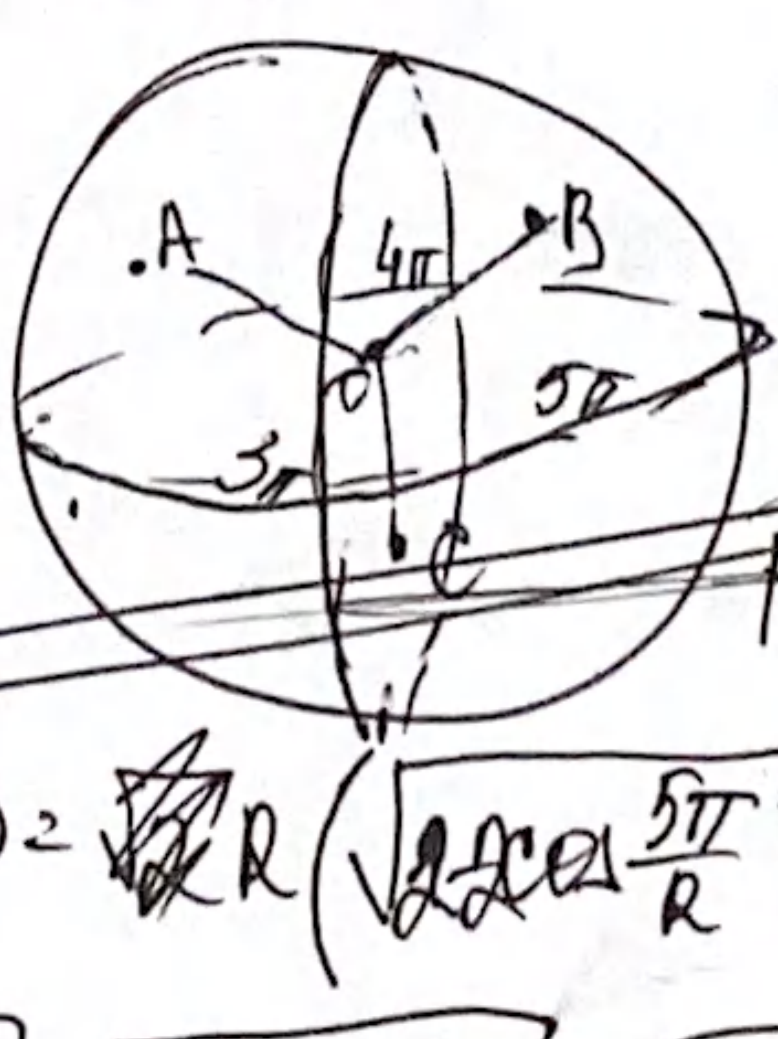
$=2x_1x_2x_3+$ ~~…~~ $(7+x_2^2)(-6-x_2)=-(7+x_2^2)(6+x_2)=$

$(x-a)^3=$ ~~$(x^2-2ax+a^2)$~~ $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$

$\frac{k(k-1)}{2}+1=\frac{k^2-k+2}{2}$

$=-(6+x_1)(6+x_2)(6+x_3)=-(36+x_1x_2+6x_1+6x_2)(6+x_3)=-(216+6$

R – радиус



$2\pi R\cdot\frac{\angle OBC}{2\pi}=5\pi \Rightarrow \angle OBC=\frac{5\pi}{R}$

~~$p_{AB}=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\angle OBC}+$~~

~~$=\sqrt{2}R\sqrt{1-\cos}$~~

$p=R\left(\sqrt{2-2\cos\frac{5\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{3\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{R}}\right)$

$p'=\left(\sqrt{2-2\cos\frac{3\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{5\pi}{R}}\right)+R($