0 237652 760000

23-76-52-76
(123.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Стародубцева Даниеля Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
23-76-52-76	100	20	20	20	20	20	10		

23-76-52-76 (123.2)

Чистовик
Лист 1

№1

$1-\sqrt{2}\sin x(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x-\sin x)=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$\cos^2(x-\frac{\pi}{8})+\sin^2(x-\frac{\pi}{8})-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2x+2\sqrt{2}\cos^2x-\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}(\cos^2x-\sin^2x)-2\sqrt{2}\sin x\cos x=\cos^2(x-\frac{\pi}{8})-\sin^2(x-\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$4\sqrt{2}\cos 2x-2\sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x$

$3\sqrt{2}\cos 2x-3\sqrt{2}\sin 2x=0$

$\cos 2x=\sin 2x$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$

№2.

Рассмотрим случаи.

1) Мотоциклист выехал позже, но велосипедист останавливался в пути. (Здесь и далее S - весь путь, x - скорость велосипедиста). Тогда
$1+\frac{S}{2x}=2+\frac{S}{x}$, откуда $\frac{S}{x}=-2$, что невозможно.

2) Мотоциклист выехал позже и останавливался в пути. Тогда: $1+2+\frac{S}{2x}=\frac{S}{x}$, откуда $\frac{S}{x}=6$, т.е. они прибыли в B в 19:00

3) Велосипедист выехал позже, но мотоцикл. ост. в пути
$1+\frac{S}{x}=2+\frac{S}{2x}\Rightarrow\frac{S}{x}=2$, т.е. они прибыли в B в
$13+1+2=16:00$

4) Велосипедист выехал позже и ост. в пути. Тогда:
$1+2+\frac{S}{x}=\frac{S}{2x}\Rightarrow\frac{S}{x}=-6$, что невозможно.

Итак, они прибыли либо в 16:00, либо в 19:00

Ответ: 16:00 или 19:00

Чистовик

лист 2.

№3

Имеем по т. Виета: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7 \\ x_1x_2x_3=1 \end{cases}$

Найдём ещё $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$=36-14=22$

А также $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-$

$-x_1^2(x_2+x_3)-x_2^2(x_1+x_3)-x_3^2(x_1+x_2)=6\cdot 22-$

$-(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2)=$

$=132-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+3x_1x_2x_3=$

$=132-6\cdot 7+3=93$

Снова по т. Виета имеем:

$a=-((x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_1+x_3))=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=22+3\cdot 7=22+21=43$

$c=-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=-(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_2+x_3)=$

$=-(x_1^2x_1+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+2x_1x_2x_3)=$

$=-((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-3x_1x_2x_3+2x_1x_2x_3)=$

$=-((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3)=$

$=-(6\cdot 7-1)=-41$

Ответ: $\begin{cases} a=-12 \\ b=43 \\ c=-41 \end{cases}$

Чистовик
Лист 3

№6

Заметим, что $\frac{N}{p_1}$ является делителем N, причём наибольшим возможным, т.к. мы поделили на наименьший из делителей, т.е. $\frac{N}{p_1}=p_k$ или $p_1 p_k = N$

Аналогично $\frac{N}{p_2}$ является вторым по старшинству делителем N, т.е. $\frac{N}{p_2}=p_{k-1}$ или $p_2\cdot p_{k-1}=N$

И вообще для любого $1\le t\le k$ верно $p_t\cdot p_{k+1-t}=N$.

В задаче очевидно $k\ge 1877$, иначе p_{1877} не опр.

Предположим $k>1879$, тогда:

$$p_3\cdot p_{1877}\cdot p_4\cdot p_{1876} < p_3\cdot p_{k-2}\cdot p_4\cdot p_{k-3} = N^2$$

Напротив, если $k\le 1879$ (с условием $k\ge 1877$), нам гарантированно, что

$$p_3\cdot p_{1877}\cdot p_4\cdot p_{1876} \ge p_3\cdot p_{k-2}\cdot p_4\cdot p_{k-3} = N^2,$$ т.е.

любое N для которого $1877\le k\le 1879$ удовлетворяет условию задачи.

Имеем формулу $\sigma\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{a_i}\right)=\prod_{i=1}^{s}(a_i-1)$ (здесь и далее q - простые)

Рассмотрим случаи:

1) $k=1877$ - простое (я перебрал простые делители до $45=\sqrt{2025}$). Т.о. возможно лишь N вида q^{1876}, т.е. $N^3=q^{5628} \Rightarrow \sigma(N^3)=5629$

2) $k=1878=2\cdot 3\cdot 313$

Т.о. возможно $N=q^{1877} \Rightarrow N^3=q^{5631} \Rightarrow \sigma(N^3)=5632$

$N=q_1^5\cdot q_2^{312} \Rightarrow N^3=q_1^{15}\cdot q_2^{936} \Rightarrow \sigma(N^3)=16\cdot 937=14992$

$N=q_1\cdot q_2^{938} \Rightarrow N^3=q_1^3\cdot q_2^{2814} \Rightarrow \sigma(N^3)=4\cdot 2815=11260$

$N=q_1^2\cdot q_2^{625} \Rightarrow N^3=q_1^6\cdot q_2^{1875} \Rightarrow \sigma(N^3)=7\cdot 1876=13132$

$N=q_1\cdot q_2^2\cdot q_3^{312} \Rightarrow N^3=q_1^3\cdot q_2^6\cdot q_3^{936} \Rightarrow \sigma(N^3)=4\cdot 7\cdot 937=26236$

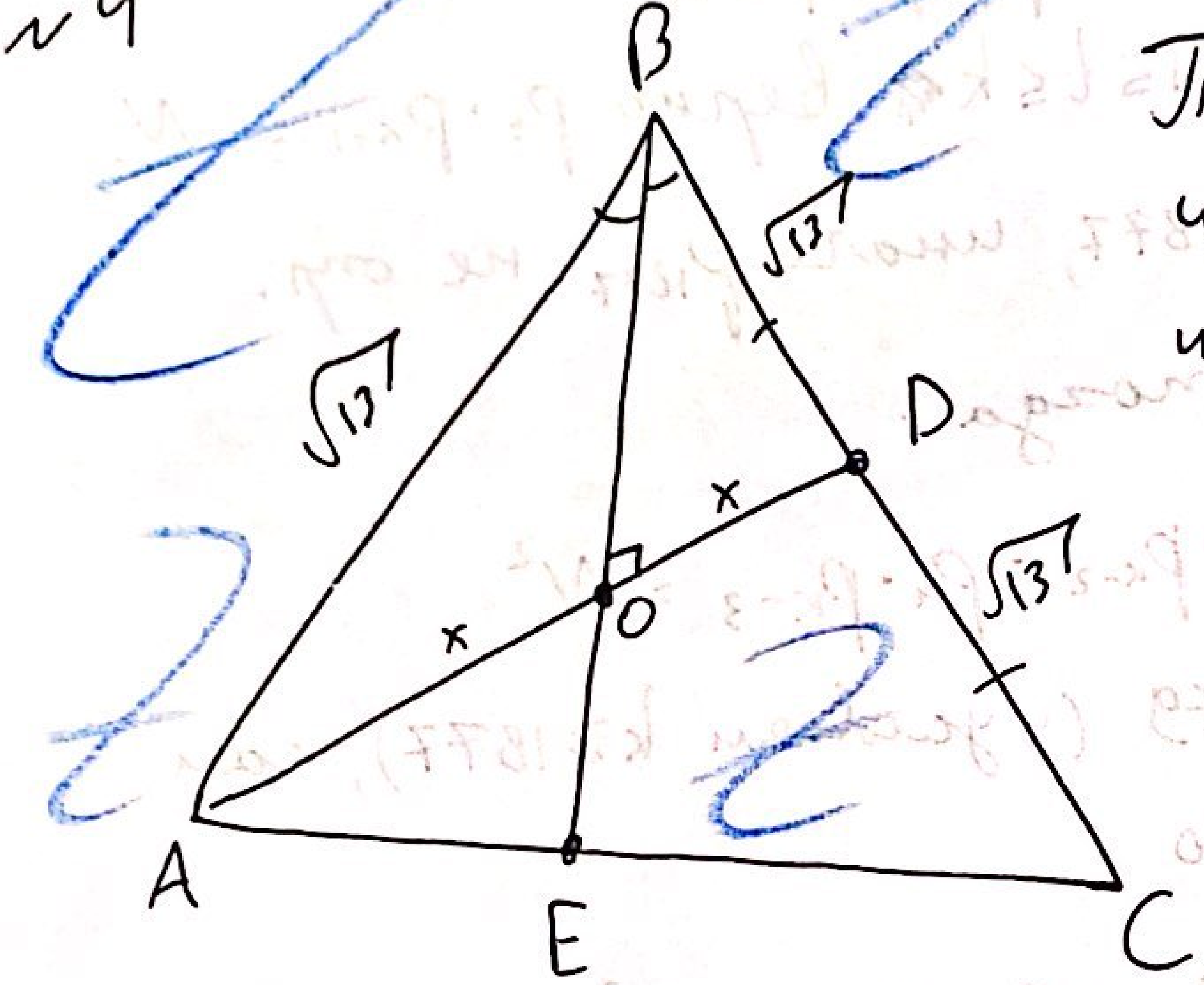
Чистовик
Лист 4

3) $k=1879$ - простое $\Rightarrow N=9^{1878} \Rightarrow N^3=9^{5634} \Rightarrow \sigma(N^3)=5635$

Итак, мы нашли все возможные варианты $\sigma(N^3)$

Ответ: 5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236.

№4



Т.к. в $\triangle ABD$ BO - бисс. и выс., то $AB=BD=\sqrt{13}=CD$, и $AO=OD$ $(=x)$.

Тогда $BO=\sqrt{13-x^2}$ по т. Пифагора, а $OE=BE-BO=$
$=AD-BO=2x-\sqrt{13-x^2}$

Тогда по т. Пифагора имеем $AE=\sqrt{x^2+(2x-\sqrt{13-x^2})^2}=\sqrt{5x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13-x^2}=$
$=\sqrt{4x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13}$.

Имеем по т. о бисс. $AB:BC=AE:EC \Rightarrow EC=2AE$

По формуле длины медианы:

$$2x=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot 2+2\cdot 9(4x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13)-4\cdot 13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2=13\cdot 2+2\cdot 9\cdot 4x^2-2\cdot 9\cdot 4x\sqrt{13-x^2}+2\cdot 9\cdot 13-4\cdot 13$$

$$0=56x^2-72x\sqrt{13-x^2}+16\cdot 13$$

$$0=7x^2-9x\sqrt{13-x^2}+2\cdot 13$$

$$81x^2(13-x^2)=49x^4+14\cdot 26x^2+26\cdot 26$$

$$81\cdot 13x^2-81x^4=49x^4+28\cdot 13x^2+52\cdot 13$$

$$130x^4-53\cdot 13x^2+52\cdot 13=0$$

$$10x^4-53x^2+52=0 \qquad t=x^2$$

$$10t^2-53t+52=0$$

$$t=\frac{53\pm\sqrt{2809-2080}}{20}=\frac{53\pm 27}{20}=\left[\begin{array}{l}4\\1{,}3\end{array}\right.$$

Чистовик
Лист 5

Случай $t=1,3$ невозможен, т.к. необходимо $2x > \sqrt{13-x^2}$, а $x=\sqrt{1,3}$ этому не удовл.

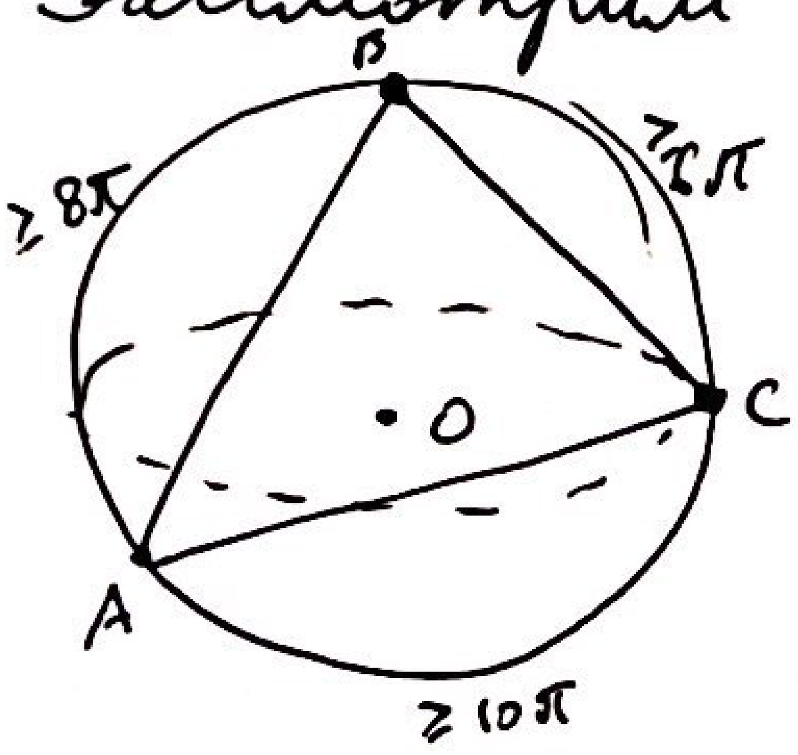
Т.о. $t=4 \Rightarrow x=2$.

Тогда $BO=\sqrt{13-4}=3 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot BO =$
$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 12$

Ответ: 12

№5

Рассмотрим сечение сферы плоскостью треугольника.



Оно является окружностью с общей длиной дуги $\geq 24\pi$, т.е. её радиус ≥ 12. Но мы вольны выбрать мин. дуги, не меняя при этом остальных => рассмотрим р-во.

Сторона BC видна из O под углом $\frac{6\pi}{24\pi}\cdot 2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow BC=\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$

Сторона AB видна из O под углом $\frac{8\pi}{24\pi}\cdot 2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB=\sqrt{12^2+12^2-2\cdot12\cdot12\cdot\cos\frac{2\pi}{3}} = 12\sqrt{1+1+2\cdot\frac{1}{2}} = 12\sqrt{3}$

Сторона AC видна из O под углом $\frac{10\pi}{24\pi}\cdot 2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow AC=\sqrt{12^2+12^2-2\cdot12\cdot12\cdot\cos\frac{5\pi}{6}} = 12\sqrt{1+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2} = 12\cdot\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = 12\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

Итого периметр равен $12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$

Пояснение: выбран минимально возмож. радиус, т.к. даже при нём выполнение условия задачи возможно (центр сферы лежит в плоскости треугольника).

Ответ: $12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$

Черновик

$2R^2(1-\cos\alpha)+2R^2(1-\cos\beta)+2R^2(1-\cos\gamma)=$

$=2R^2\left(3-\cos\left(\frac{6\pi}{R}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{R}\right)+\cos\left(\frac{10\pi}{R}\right)\right)$ $R\geqslant 10$

$f(x)$ $g(x)$

$f'(x)=4R$

$g'(x)=\left(\frac{6\pi}{R}\right)'\sin\frac{6\pi}{R}+\ldots=$

$=\frac{-6\pi}{R^2}\sin\frac{6\pi}{R}-\frac{8\pi}{R^2}\sin\frac{8\pi}{R}-\frac{10\pi}{R^2}\sin\frac{10\pi}{R}$

$4R\left(3-\cos\frac{6\pi}{R}-\cos\frac{8\pi}{R}-\cos\frac{10\pi}{R}\right)+2R^2\left(\frac{6\pi}{R^2}\sin\frac{6\pi}{R}+\frac{8\pi}{R^2}\sin\frac{8\pi}{R}+\frac{10\pi}{R^2}\sin\frac{10\pi}{R}\right)$

$=2R\left(3-\cos\frac{6\pi}{R}-\cos\frac{8\pi}{R}-\cos\frac{10\pi}{R}\right)+6\pi\sin\frac{6\pi}{R}+8\pi\sin\frac{8\pi}{R}+10\pi\sin\frac{10\pi}{R}$

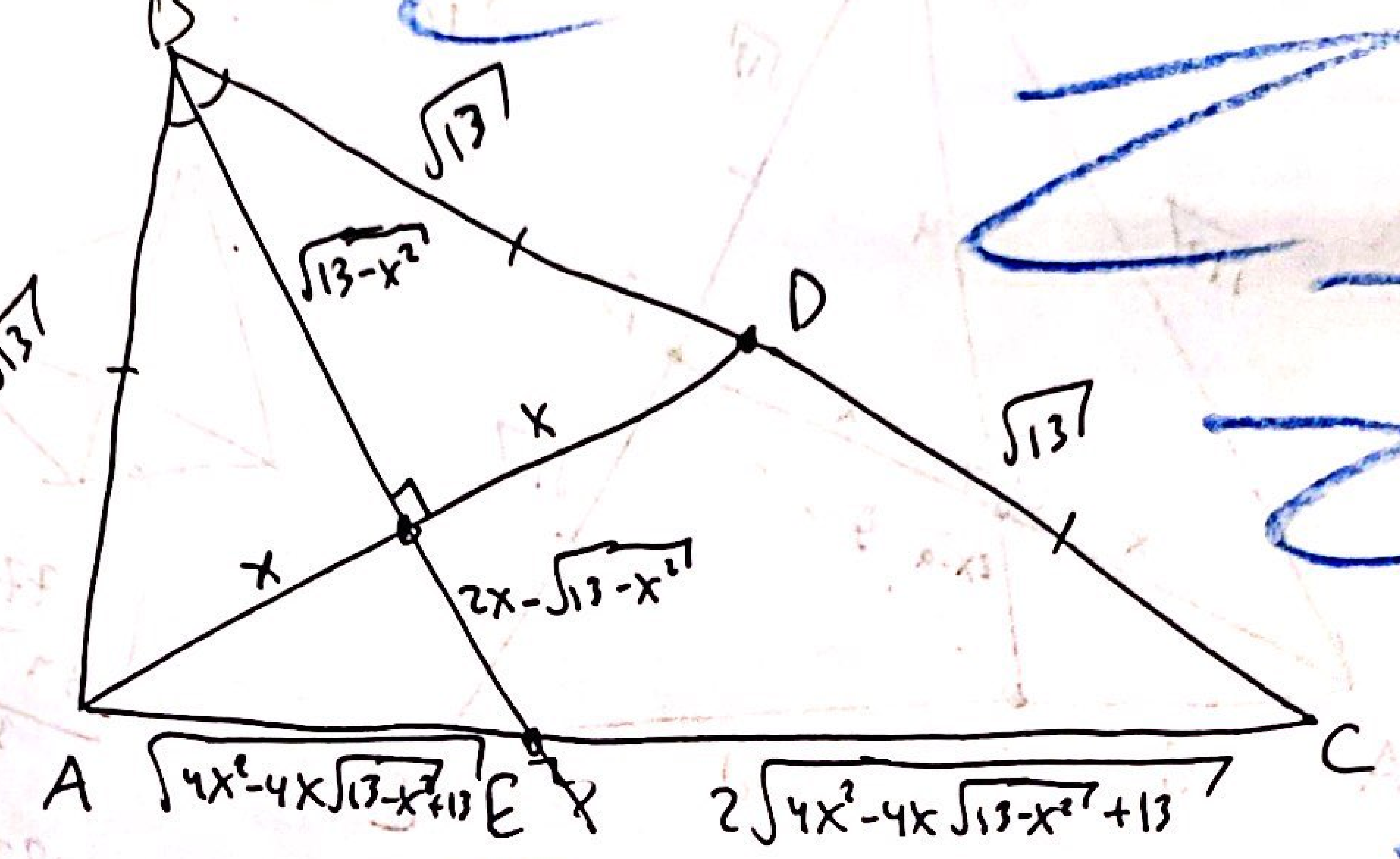
$R\left(3-\cos\frac{6\pi}{R}-\cos\frac{8\pi}{R}-\cos\frac{10\pi}{R}\right)+3\pi\sin\frac{6\pi}{R}+4\pi\sin\frac{4\pi}{R}+5\pi\sin\frac{5\pi}{R}$

$3R+\left(3\pi\sin\frac{6\pi}{R}-R\cos\frac{6\pi}{R}\right)$

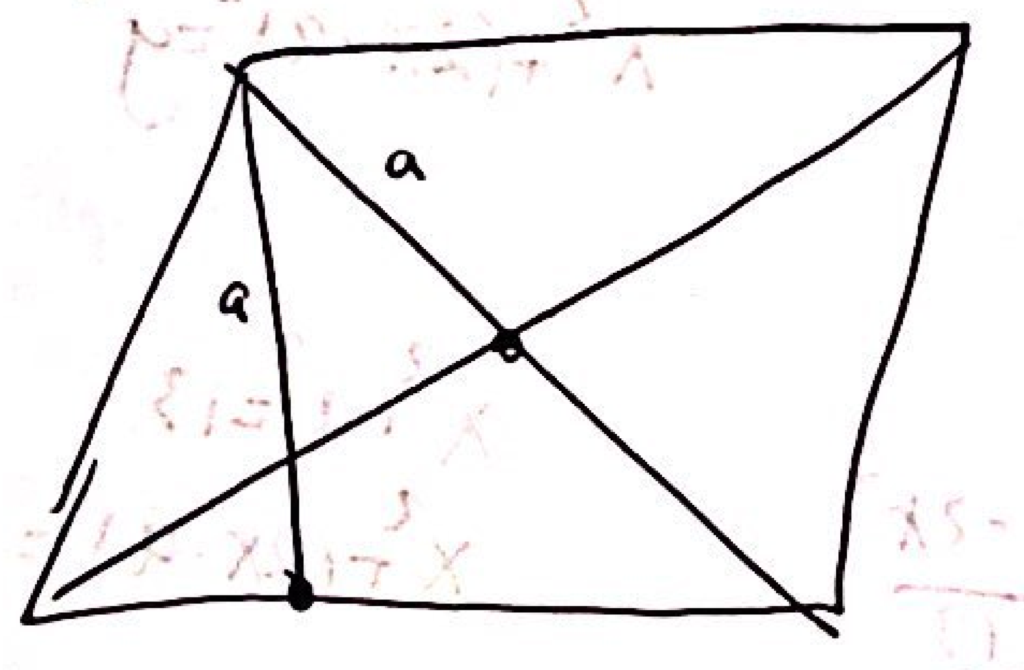
$\geqslant-\sqrt{9\pi^2+R^2}$

Черновик

$AD = BE$



$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$



$$\begin{array}{r} 81 \\ 28 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2+(2x-\sqrt{13-x^2})^2} = \sqrt{\cancel{x^2}+4x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13-\cancel{x^2}} =$$

$$= \sqrt{4x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13}$$

$$2x = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 13+2\cdot 9\cdot(4x^2-4x\sqrt{13-x^2}+13)-4\cdot 13}$$

$$16x^2 = 2\cdot 9\cdot 4x^2 - 2\cdot 9\cdot 4x\sqrt{13-x^2}+2\cdot 13+2\cdot 9\cdot 13-4\cdot 13$$

$$0 = 56x^2 - 72x\sqrt{13-x^2}+16\cdot 13$$

$$36x\sqrt{13-x^2} = 28x^2+8\cdot 13$$

$$18x\sqrt{13-x^2} = 14x^2+4\cdot 13$$

$$9x\sqrt{13-x^2} = 7x^2+26$$

$$81x^2(13-x^2) = 49x^4+14\cdot 26x^2+26^2$$

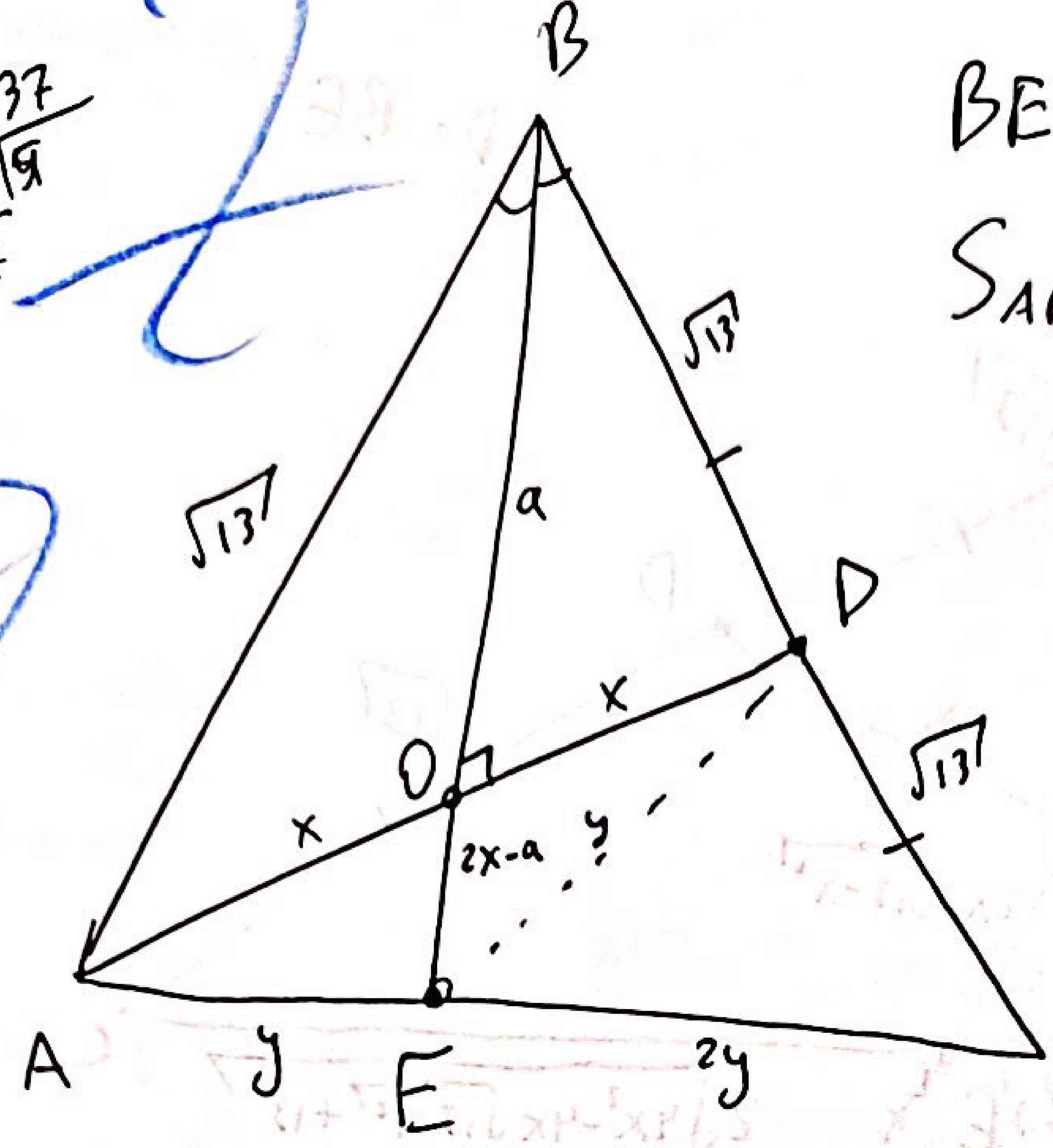
$$81\cdot 13x^2-81x^4 = 49x^4+28\cdot 13x^2+26^2$$

$$130x^4-53\cdot 13x^2+26\cdot 2\cdot 13=0$$

$$10x^4-53x^2+52=0$$

$$10t^2-53t+52=0$$

Черновик

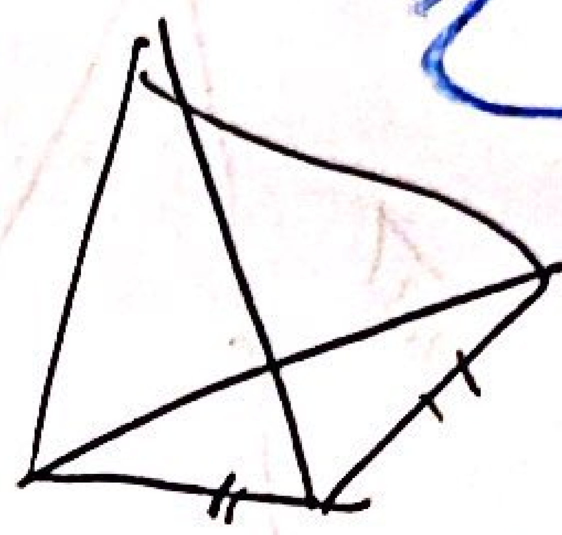


$1877 \,|\, 37$, 185, 9, 27

$1877 \,|\, 41$, 164, 4, 234

$BE = AD$

$S_{ABC} = ?$



$1877 \,|\, 23$, 184, 8, 37

$1877 \,|\, 31$, 186, 6, ~~227~~

$BE = 2x$

$1877 \,|\, 29$, 174, 6, 137

$x^2 + a^2 = 13$

$x^2 + (2x-a)^2 = y^2$

$R\alpha = 6\pi$

$R\beta = 8\pi$

$R\gamma = 10\pi$

$4x^2 = 13 + 13 - 2 \cdot 13 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{26 - 4x^2}{2 \cdot 13} = \frac{13 - 2x^2}{13}$

$x^2 + a^2 = 13$

$x^2 + (2x-a)^2 = \frac{13 - 8x^2}{9}$

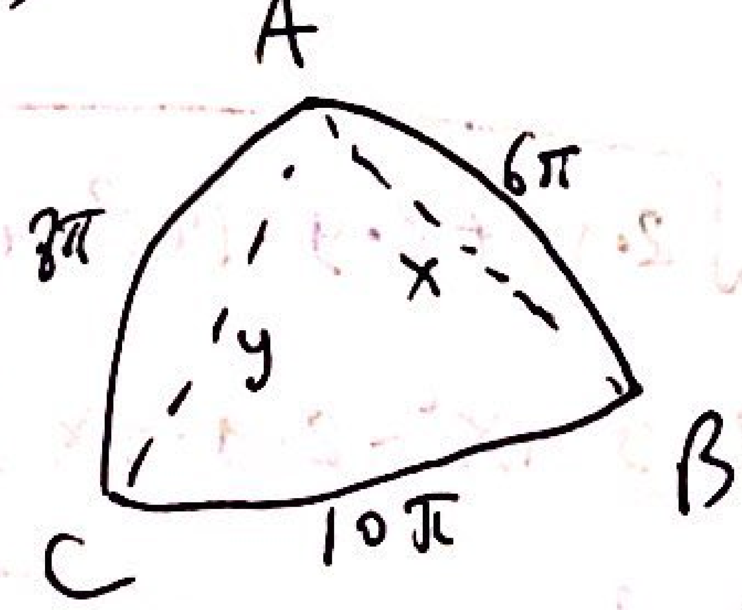
$5x^2 - 4ax + a^2 = \frac{13 - 8x^2}{9}$

$4x^2 - 4ax + 13 = \frac{13 - 8x^2}{9}$

$9y^2 = 13 + 4 \cdot 13 - 4 \cdot 13 \cdot \cos\alpha$

$9y^2 = 5 \cdot 13 - 4(13 - 2x^2)$

$9y^2 = 13 - 8x^2$



$1877 \,|\, 7$, 14, 26, 47, 42, 57

1877

1936
1877

$23 + 36 = 59$

α

$x = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$

$2\pi R \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$

$R\alpha$

$2R^2(1 - \cos\alpha)$

$1877 \,|\, 17$, 17, 11, 17

$1877 \,|\, 19$

$\frac{x}{y} = \frac{6\pi}{8\pi}$

$1877 \,|\, 18$, 13, 14, 57, 52, 57

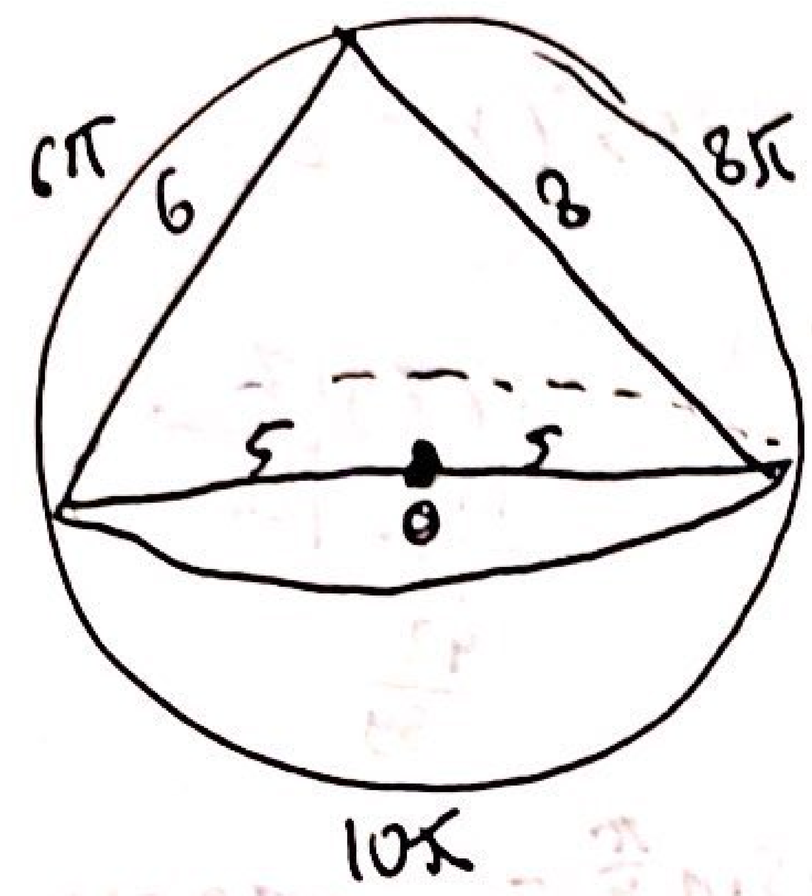
Черновик

$x_1+x_2 \quad x_1+x_3 \quad x_2+x_3$

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7$

$x_1x_2x_3=1$



$2x_1+2x_2+2x_3=-a$

$x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+$
$+x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3+x_3^2=6$

$\Downarrow$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cancel{4}\,3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=6$

$(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_2+x_3)=$

$=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+$
$+x_1x_3^2+x_2x_3^2=-c$

$x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)=$

$=x_1^2(6-x_1)+x_2^2(6-x_2)+x_3^2(6-x_3)=$

$=6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3$

$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)=$

$=x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2$

60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

$p_1\cdot p_k=N$ $\qquad$ $k=1879$

$p_2\cdot p_{k-1}=N$ $\qquad$ $p_1\cdot p_{1879}=N$

$p_3\cdot p_{k-2}=N$ $\qquad p_{k-2}$ $\qquad$ $p_3\cdot p_{1877}=N$

$p_4\cdot p_{1876}=N$

$k>1879$:

$p_3\cdot p_{1877}\cdot p_4\cdot p_{1876} < p_3\cdot p_{k-2}\cdot p_4\cdot p_{k-3}=N^2$

$k\le 1879$

Черновик

$1-\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\sin^2 x + 2\sqrt{2}\cos^2 x - \sqrt{2}\sin x\cos x = 2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{2}\sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x = 2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$\cos^2(x-\frac{\pi}{8}) + \sin^2(x-\frac{\pi}{8}) - \sqrt{2}\sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x = 2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = \cos^2(x-\frac{\pi}{8}) - \sin^2(x-\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = \cos(2x-\frac{\pi}{4})$

$\cos 2x\cdot\cos\pi/4 + \sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4} = = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$4\sqrt{2}\cos 2x - 2\sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x$

$3\sqrt{2}\cos 2x - 3\sqrt{2}\sin 2x = 0$

$\cos 2x = \sin 2x$

1879 | 7, 26; 14, 47, 42, 59

1879 | 29, 6; 174, 139

1879 | 17

1879 | 29, 8; 184, 39

1879 | 11, 1; 11, 77

1879 | 13, 14; 13, 57, 52, 59

1876 · 3 = 5628

1) мотоцикл позже вел. ост.

$V_в = x$

$V_м = 2x$

$S = S.$

938 · 3 = 2814

$1+\frac{S}{2x} = 2+\frac{S}{x}$

$t=\frac{S}{x}$

$1+\frac{t}{2} = 2+t$

$\frac{t}{2} = -1$

1878 | 2, 939; 18, 7, 18

1878 · 3 = 5634

939 | 3, 313

313 | 7, 4; 28, 33

2) вел. позже. мот. ост.

2815 · 4 = 11260

$1+\frac{S}{x} = 2+\frac{S}{2x}$

$t = 1+\frac{t}{2}$

$t=2$

313 | 13

2401 − 1879 = 522

3) мот позже мот. ост.

2025 − 1879 = 146

$1+2+\frac{S}{2x} = \frac{S}{x}$

$1+2+\frac{t}{2} = t$

$t=6$

2500

313 | 17

2116 − 1879 = 237

937 · 16 = 5622, 937, 14992

2209 − 1879 = 330

1876 · 7 = 13132

324 − 811

361 − 48

2304 − 1879 = 425

937 · 28 = 7496, 1874, 26236