0546451850004

54-64-51-85
(123.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мазей Софьи Юрьевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
54-64-51-85	90	20	20	20	20	10	0		

54-64-51-85 (123.7)

Чистовик. 1

N1.

$$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\cdot\sin x\,(2\sin x-\cos x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-\sqrt{2}\cdot\cos x\cdot\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin^2 x-\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\cos x=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x=2\cdot\left(1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$1-2-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x=-2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$-1-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x+2\cdot\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0$$

$$-1-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

$$-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x+\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=0$$

$$-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x=0$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\sin 2x-\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\cos 2x=0 \quad |:\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$\sin 2x+\cos 2x=0$$

$$\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$$

$$2\cdot\sin\left(\frac{2x+\frac{\pi}{2}-2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x-\frac{\pi}{2}+2x}{2}\right)=0 \quad |:2$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad |:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

Черновик.

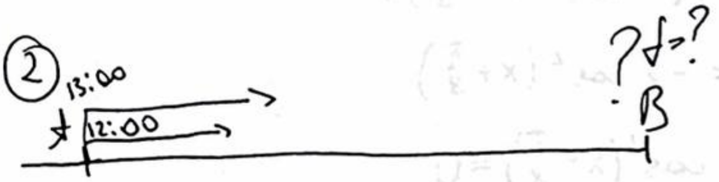
①

$\cos^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$

②



Время выезда: 13:00 и 12:00

ост. – 2ч

$x - v_{\text{вел.}}$

$2x - v_{\text{мот}}$

1) мот. на час раньше: 12:00 – мот.
13:00 – вел.
t

$2\cancel{x}\cdot(t-1) = \cancel{x}\cdot(t)$

$2t - 1 = t$

$t = 5 \to 17{:}00$

2) мот. на час позже:

$2x(t-3) = x(t)$

$2t - 6 = t$

$t = 6 \to 18{:}00$

1) мот. – 12:00 – ост. 2ч. $(t-2+1)$
вел. – 13:00 – t в пути

$2x\cdot(t-2+1) = tx \;|:x>0$

$2(t-1) = t$

$2t - 2 = t$

$t = 2 \Rightarrow 15{:}00$

2) мот. – 13:00 – ост. 2ч $(t-1-2)$
вел. – 12:00 – t в пути

$2x(t-3) = tx \;):x$

$2t - 6 = t$

$t = 6 \Rightarrow 18{:}00$

54-64-51-85 (123.7)

№6. Чистовик. 9

$1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$ — всего их $\delta(N)$

$\delta(N^3) = ?$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^2$

$20 = 20, 10, 5, 4, 2, 1$ $30 = 30, 15, 6, 5, 2, 1$

$45 = 45, 15, 9, 5, 3, 1$

$120 = 120, 60, 40, 30, 24, 20, 15, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1$

$p_3 \cdot p_{1697} = N$

$p_4 \cdot p_{1696} = N$

$\overset{120}{40 \cdot 3} \cdot \overset{120}{30 \cdot 4} = 120^2$

Если $K > 1699$, то не будет вып-ся =>

=> кол-во членов = 1699, т.е. у числа N – 1699 дел. =>

=> у N^2 их $1699 \cdot 2 + 1 = 3399$, т.к. у N^2 делителей на 1 больше из-за N, если N - четное

~~Тогда у N^3 их~~ если N - неч., тогда

у N^2 их $1699 \cdot 2 - 1 = 3397$

у N^3: $2n - 2$, где n - кол-во дел. у N^2,

т.е. $3399 \cdot 2 - 2 = 16.000 - 4 = 15.996$

или $2n - 4$:

$3339 \cdot 2 - 4 = 16.000 - 6 = 15.994$

Ответ: 15.996 или 15.994

Черновик.

(6)

20 = 20, 10, 5, 4, 2, 1 – 6 дел.

400 = 400, 200, 100, 80, 50, 40, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$15 = \frac{30}{100}$ 400 | 15 | 2

1 2 4 5 8 10 16 20 25
8000 = 8000, 4000, 2000, 1600, 1000, 800, 500, 400, 350,

8000 | 12 | 6 ; 72 ; 80

40 50 80 | 100 160
200, 160, 100, | 80,

8000 | 15 | 53 ; 75 ; 50 ; 45 ; 50

24

8000 | 16 | 500

8000 | 25 | 350 ; 75 ; 50

8000 | 35 | 22 ; 70 ; 100 ; 70 ; 300

8000 | 45 | 17 ; 45 ; 350 ; 315 ; 350

$45 \times 7 = 315$

$729 = 9^3 = 3^6 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

9 = 9 3 1 – 3

81 = 81 27 9 3 1 – 5 2n-1

81 = 81 27 9 3 1 – 5 шт.

$729 = 729, 3^5, 3^4, 3^3$

9, 3, 1 – 6 шт

Черновик.

5 = 5 1 − 2

25 = 25 5 1 − 3

125 = 125 25 5 1 − 4

4 = 4, 2, 1 − 3 шт.

16 = 16, 8, 4, 2, 1 − 5 шт.

$27^2 = 3^6$

$27^3 = 3^9$

27 = 27 9 3 1 − 4

$27^2 = 27^2\ 27 \cdot 3 \wedge \wedge 3\ 1 - 7$

$3^4, 3^3 \quad 3^2$

$27^3 = 3^9\ 3^8\ 3^7\ 3^6\ 3^5\ 3^4\ 3^3\ 3^2\ 3\ 1 - 10$ ч.

$$\begin{array}{r} \times\ 1699 \\ 2 \\ \hline 3398 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1800 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$(4000 - 1) \cdot 2 =$

$= 16.000 - 2 - 2 \quad 1700$

54-64-51-85 (123.7)

(3) **Черновик.**

$x^3+6x^2+7x+1=0$

По т. Виета для кубич. ур-ия:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=7 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1 \end{cases}$$

$(t+x_3)(t+x_1)(t+x_2)=$

$(t+x_3)(t+x_1)(t+x_2)=$

$=(t^2+t\cdot x_3+t\cdot x_1+x_1\cdot x_3)(t+x_2)=$

$=t^3+t^2x_3+t^2x_1+t\cdot x_1\cdot x_3+$

$+t^2x_2+t\cdot x_3\cdot x_2+t\cdot x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3=$

$=$

$x^3+ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-x_1-x_2)(x-x_2-x_3)(x-x_3-x_1)=$

$=(x-(-6-x_3))(x-(-6-x_1))(x-(-6-x_2))=$

$=(\underbrace{x+6}_{t}+x_3)(\underbrace{x+6}_{t}+x_1)(\underbrace{x+6}_{t}+x_2)=$

$=\cancel{t^2+3t}\ (x^2+6x+x\cdot x_3+6x+36+6\cdot x_3+x\cdot x_1+6\cdot x_1+x_1\cdot x_3)(x+6+x_2)=$

$x^2+12x+x\cdot x_3+36+6\cdot x_3+x\cdot x_1+6\cdot x_1+x_1\cdot x_3$

$=x^3+12x^2+x^2x_3+36x+6\cdot x\cdot x_3+x^2\cdot x_1+6\cdot x\cdot x_1+x\cdot x_1\cdot x_3+$

$+6x^2+72x+6\cdot x\cdot x_3+216+36x_3+6\cdot x\cdot x_1+36x_1+6\cdot x_1\cdot x_3+x^2\cdot x_2+12\cdot x\cdot x_2+$

$+x\cdot x_2\cdot x_3+36x_2+6\cdot x_2\cdot x_3+x\cdot x_1\cdot x_2+6\cdot x_1\cdot x_2+\underbrace{x_1\cdot x_2\cdot x_3}_{-1}=$

$=x^3+(12+x_3+x_1+6+x_2)x^2+(36+6x_3+6x_1+\cancel{x_1}x_3+72+6x_3+$

$+6x_1+12x_2+x_2\cancel{x_3}+x_1\cancel{x_2})x+36x_3+36x_1+6x_1\cdot x_3+$

$+36x_2+6x_2\cdot x_3+6\cdot x_1\cdot x_2+215=$

$36+7=$
$=43$

$=x^3+(18+(-6))x^2+(108+7+\overset{-72}{12(x_3+x_1+x_2)})x+\overset{-6}{36(x_1+x_2+x_3)}+$

$+6\overset{7}{(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3)}+215=$

$=x^3+12x^2+43x-216+42+215=\underline{x^3+12x^2+43x+41}$

$$\begin{array}{r} -216 \\ 72 \\ \hline 144 \end{array}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик. 2

№2.

Пусть x (км/ч) – ϑ велосипедиста, тогда $2 \cdot x$ (км/ч) – ϑ мот.

Велосипедист не мог сделать двухчасовую остановку, т.к. тогда он в пути был бы меньшее кол-во времени, чем мотоциклист (на 1 час, если мот. выехал ~~раньше~~ позже или на 3 часа, если мот. выехал раньше) и его скорость меньше скорости мотоциклиста => они не прибудут в пункт Б одновременно (Велосипедист с меньшей ϑ за меньшее t не мог ~~проехать~~ приехать в Б вместе с мотоциклистом, который с большим t и большей ϑ преодолевает такое же расстояние, что и велосипедист)

Тогда нам нужно рассмотреть 2 случая:

1) Остановку делал ~~вел~~ мотоциклист; мот. выехал в 12:00, а вел. выехал в 13:00

Пусть t (ч) – время в пути велосипедиста,
Тогда $(t-2+1)_ч$ – — " — мотоциклиста (вычли остановку (2 часа) и прибавили час, когда ~~вел~~ мот. ехал один)

Приравняем расстояния, кот. проехали вел-т и мот-т:

$x \cdot t = 2x(t-2+1) \,|: x > 0$, т.к. скорости полож-ны

$t = 2(t-1)$

$t = 2t - 2$

$2 = t$ => оба финишируют в $13{:}00 + 2ч = 15{:}00$

2) Остановку делал мот-т; мот. выехал в 13:00
вел. выехал в 12:00

54-64-51-85 (123.7)

N2 (продолж.) Чистовик. 3

Пусть t (ч) - время в пути вел-та,
тогда $(t-2-1)$(ч) - —||— мот-та (вычитаем остановку и час, когда ехал один вел-т)

Приравняем расстояния, кот. проехали вел. и мот.:

$t\cdot x = 2x(t-2-1) \mid : x>0$

$t = 2(t-3)$

$t = 2t-6$

$6 = t$ => финишируют в $12{:}00 + 6$ч $= 18{:}00$

Ответ: 15:00 или 18:00

N3.

Т.к. x_1, x_2, x_3 - корни кубич. ур-ия $x^3+6x^2+7x+1=0$, то

по т. Виета для кубич. ур-ия: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=7 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1 \end{cases}$

Многочлен x^3+ax^2+bx+c можно представить в виде:

$(x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))(x-(x_3+x_1))$, где (x_1+x_2); (x_2+x_3); (x_3+x_1) - корни ур-ия $x^3+ax^2+bx+c=0$

Преобразуем: $(x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))(x-(x_3+x_1)) =$
$= (x-(-6-x_3))(x-(-6-x_1))(x-(-6-x_2)) = (x+6+x_3)(x+6+x_1)(x+6+x_2)$ *

* Пусть $x+6=t$, тогда выр-ие примет вид:

$(t+x_3)(t+x_1)(t+x_2) = (t^2+tx_3+t\cdot x_1+x_1\cdot x_3)(t+x_2) =$

$= t^3+t^2\cdot x_3+t^2\cdot x_1+t\cdot x_1\cdot x_3+t^2\cdot x_2+t\cdot x_3\cdot x_2+t\cdot x_2\cdot x_1+x_1\cdot x_2\cdot x_3 =$

$= t^3+t^2(x_1+x_2+x_3)+t(x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_1+x_3\cdot x_2)+x_1\cdot x_2\cdot x_3 =$

$= t^3+t^2\cdot(-6)+t\cdot 7-1 = t^3-6\cdot t^2+7t-1$

N3 (прод.) Чистовик. 4

Обр. замена:

$(x+6)^3-6(x+6)^2+7\cdot(x+6)-1 = x^3+3\cdot x^2\cdot 6+3\cdot x\cdot 36+216-6(x^2+12x+36)+$

$+7x+42-1 = x^3+\underline{18x^2}+\overset{108}{\cancel{216}}x+\cancel{216}-\underline{6x^2}-72x-\cancel{216}+7x+41=$

$=x^3+12x^2+(\overset{108}{\cancel{216}}-72+7)x+41 = x^3+12x^2+(36+7)x+41=$

$=x^3+12x^2+43x+41,$

таким образом, $x^3+ax^2+bx+c = x^3+12x^2+43x+41 \Rightarrow$

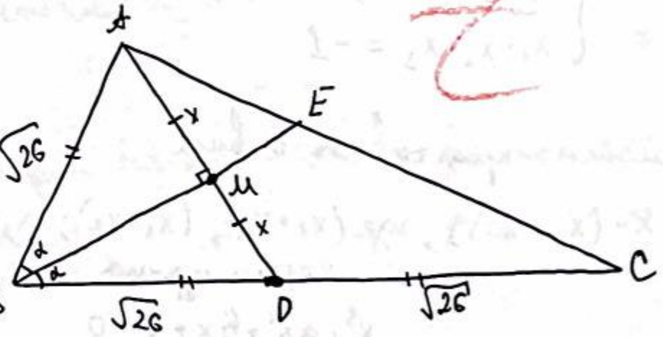
$$\Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=43 \\ c=41 \end{cases}$$

Ответ: $a=12$; $b=43$; $c=41$

N4.

Дано: BE – бис-са; AD – мед.;
$BE=AD$; $BE\perp AD$
$AB=\sqrt{26}$

Найти: $S_{ABC}=?$



Решение: 1) Пусть $AD\cap BE = M$

2) В $\triangle ABD$: BM – высота и бис-са $\Rightarrow \triangle ABD$ – р/б (по признаку р/б △-ка) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=BD=\sqrt{26}$

3) Т.к. в р/б $\triangle ABD$, BM – высота и бис-са $\Rightarrow$ BM явл. медианой (по св-ву р/б △-ка) $\Rightarrow AM=MD$

4) Пусть $BE=AD=2x$, тогда $AM=MD=\frac{AD}{2}=x$

$\angle ABM=\angle MBD=\alpha$

5) $\begin{cases} BC=BD+DC \\ BD=DC=\sqrt{26} \end{cases} \Rightarrow BC=2\sqrt{26}$

№4. (прод.) Чистовик. 5

6) В $\triangle ABC$ по формуле длины бисс-сы:

$$BE = \frac{2 \cdot AB \cdot BC}{AB + BC} \cdot \cos\left(\frac{\angle ABC}{2}\right)$$

$$2x = \frac{2 \cdot \sqrt{26} \cdot 2\sqrt{26}}{\sqrt{26} + 2\sqrt{26}} \cdot \cos\alpha$$

$$2x = \frac{4 \cdot (\sqrt{26})^2}{3\sqrt{26}} \cdot \cos\alpha \quad |:2$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\alpha \,; \quad \cos\alpha = \frac{3x}{2 \cdot \sqrt{26}}$$

7) В п/уг-ном $\triangle AMB$: $\sin\alpha = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = \sin\alpha \cdot AB$

$$x = \sin\alpha \cdot \sqrt{26} \,; \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{26}}$$

8) Из п. 6 и 7 $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \cdot \frac{2\sqrt{26}}{3} = x \quad |\uparrow 2 \\ \sin\alpha \cdot \sqrt{26} = x \quad |\uparrow 2 \end{cases}$ возведем оба ур-ия в квадрат, т.к. $0° < \alpha < 90° \Rightarrow \alpha \in$ I ч. $\Rightarrow$ $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha \cdot \frac{4 \cdot 26}{9} = x^2 \\ \sin^2\alpha \cdot 26 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 \cdot \cos^2\alpha = \frac{9x^2}{4} \\ 26 \cdot \sin^2\alpha = x^2 \end{cases} \Bigg| \oplus$$

$$26(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1}) = \frac{9x^2}{4} + \frac{4x^2}{4}$$

$$26 = \frac{13x^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{\cancel{26}^{\,2} \cdot 4}{\cancel{13}_{\,1}}$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ – н.к., т.к. } x > 0 \end{array}\right.$$

9) Из п. 6 и 8 $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{3x}{2 \cdot \sqrt{26}} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3 \cdot \cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{26}}_{\sqrt{13}}} \,; \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

10) Из п. 7 и 8 $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{26}} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{26}}_{\sqrt{13}}} \,; \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

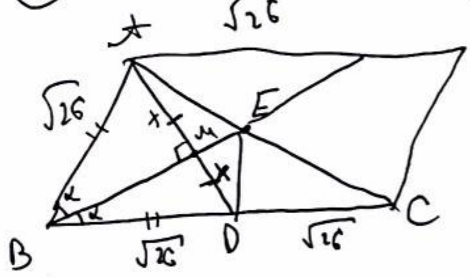
11) Из 9 и 10 $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{12}{13}$$

Черновик.

4



$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin 2\alpha = $$
$$= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \sin 2\alpha$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

?

$\boxed{BE = AD}$

$$BE = \frac{2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha}{AB + BC} = 2x \Rightarrow \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{26} \cdot 2\sqrt{26} \cdot \cos\alpha}{3\sqrt{26}} = \cancel{2}x$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{26} \cdot \cos\alpha = x$$

$$AM = x = \sin\alpha \cdot \sqrt{26} \Rightarrow x = \sin\alpha\sqrt{26}$$

$$\begin{cases} x = \sin\alpha\sqrt{26} \\ \frac{2}{3}\sqrt{26} \cdot \cos\alpha = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\sqrt{26} = x \ \ |\uparrow 2 \\ \frac{2}{3}\cos\alpha \cdot \sqrt{26} = x \ |\uparrow 2 \end{cases} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha \cdot 26 = x^2 \\ \cos^2\alpha \cdot 26 = \frac{x^2 \cdot 9}{4} \end{cases} \ (+)$$

$$26 = \frac{13 \cdot x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \cancel{\frac{7}{4} = \frac{1}{2}}\ 8$$

$$x^2 = \frac{26 \cdot 4}{13} = 8$$
$$x = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}} \\ \cos\alpha = \frac{x \cdot 3}{2\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{2\sqrt{26}} \end{cases}$$

$$\cancel{\sin\alpha = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{26} = 4\sqrt{13}}$$
$$\cos\alpha =$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

№4 (прод. 2) Чистовик. 6

12) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\angle ABC$

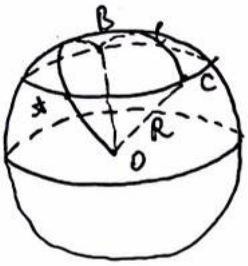
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{26}\cdot \sin 2\alpha$

$S_{ABC} = \frac{\cancel{26}^{2}\cdot 12}{\cancel{13}}$

$S_{ABC} = 24$

Ответ: 24

№5.



$\rho(A,B) = 4\pi$; $\rho(A,C) = 3\pi$; $\rho(B,C) = 5\pi$

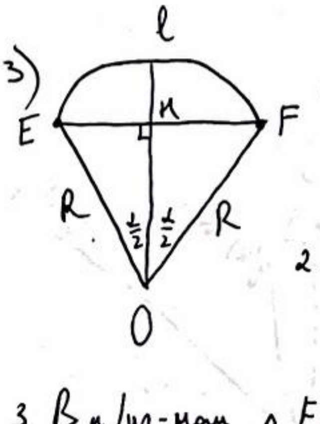
Найти: $\min P_{ABC} = ?$

1) Отметим, что т.к. расстояние м/д двумя точками по поверхности сферы минимально, то любое ρ будет от $(0; \pi R]$, иначе оно перестанет быть минимальным и мы будем исследовать не ρ, а $(2\pi R - \rho)$; πR - это половина дуги окр-ти, на кот. расп. т. A, B и C с ~~радиус~~ центром O, где O - центр сферы

2) $4\pi + 3\pi + 5\pi = 12\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 6$

Заметим, что радиус не может быть меньше 6, т.к. тогда наиб. ρ будет меньше $6\pi \Rightarrow$ длина всей окр-ти $< 12\pi \Rightarrow$ A, B и C не разместятся

3)



1. Рассм-м нек-рые т. E и F, леж. на сфере, Пусть $\rho(E,F) = l$, тогда $\angle EOF = \alpha = \frac{l}{R}$
2. Проведем $OH \perp EF$, OH - высота, медиана и бис-са в р/б $\triangle EOF \Rightarrow EH = HF$, $\angle EOH = \angle HOF = \frac{\alpha}{2}$
3. В п/уг-ном $\triangle EHO$: $EH = \sin\angle EOH \cdot EO$

$EH = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot R$

4. $EF = 2\cdot EH = 2R\cdot \sin\frac{l}{2R}$

Чистовик. 7

5. N5 (прод.) Распишем каждую ст. $\triangle ABC$ через полученное выр-ие с данными ℓ:

$$AB = 2R\cdot\sin\frac{4\pi}{2R} = 2R\cdot\sin\frac{2\pi}{R}$$

$$BC = 2\cdot R\cdot\sin\frac{5\pi}{2R} = 2R\cdot\sin\frac{2{,}5\pi}{R}$$

$$AC = 2R\cdot\sin\frac{3\pi}{2R} = 2R\cdot\sin\frac{1{,}5\pi}{R}$$

$$P_{ABC} = AB+BC+AC = 2R\cdot\sin\frac{2\pi}{R} + 2R\cdot\sin\frac{2{,}5\pi}{R} + 2R\cdot\sin\frac{1{,}5\pi}{R}$$

6. Рассм-м ф-цию $y(R) = R\cdot\sin\frac{\ell}{R}$

$$y'(R) = \sin\frac{\ell}{R} - \frac{\ell}{R}\cdot\cos\frac{\ell}{R}$$

Оценим $\frac{\ell}{R}$:

Из п. (2) мы выяснили, что $\min R = 6$

Рассм-м max величину $\frac{\ell}{R}$: $\frac{5\pi}{2R}$

при $R = 6$ $\frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$

и при последующем увеличении R,

угол будет только уменьшаться =>

$\Rightarrow 0 < \frac{\ell}{R} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{R}$ – угол в I ч. $\Rightarrow \sin\frac{\ell}{R} > 0$, $\cos\frac{\ell}{R} > 0$

Рассм-м $y'(R) = \sin\frac{\ell}{R} - \frac{\ell}{R}\cdot\cos\frac{\ell}{R}$

Предположим, что $\sin\frac{\ell}{R} - \frac{\ell}{R}\cdot\cos\frac{\ell}{R} > 0$

$$\sin\frac{\ell}{R} > \frac{\ell}{R}\cdot\cos\frac{\ell}{R} \quad \Big| : \cos\frac{\ell}{R} > 0$$

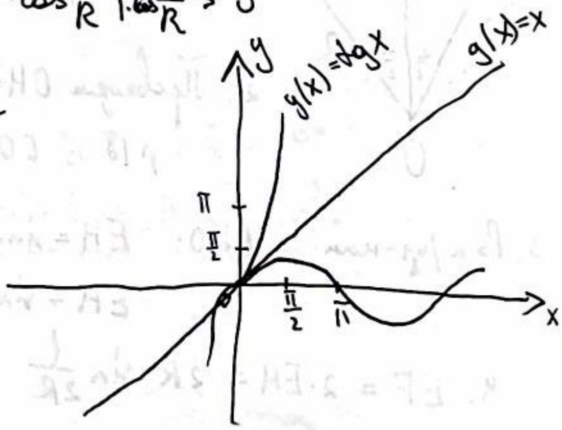
$$\operatorname{tg}\frac{\ell}{R} > \frac{\ell}{R}$$

Пусть $\ell/R = x$,

тогда рассм-м ф-ции:

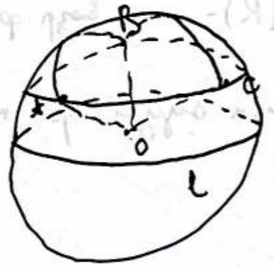
$y(x) = \operatorname{tg} x$

$g(x) = x$



Черновик.

5



$\overline{AB} = 4\pi$

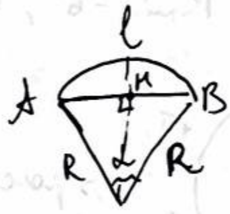
$\overline{AC} = 3\pi$

$\overline{BC} = 5\pi$

$C = 4\pi + 3\pi + 5\pi = 12\pi$

$P_{ABC} = ?$

$C = 2\pi R =$ $R < 6$



$0 < l \le \pi R$, т.к. min ρ

$\alpha = \frac{l}{R}$

$\sin\alpha = \frac{AH}{R}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2R}$

$2AH = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot R$ $\quad AH = \sin\frac{l}{2}\cdot R$

$P_{ABC} = \sin\frac{l}{2R} + \quad 2\cdot AH =$ $\quad \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$

$P_{ABC} = 2\sin\frac{4\pi}{2R}R + 2R\sin\frac{3\pi}{2R} + 2R\cdot\sin\frac{5\pi}{2R}$

$P = 2R\cdot\sin\frac{2\pi}{R} + 2R\cdot\sin\frac{1,5\pi}{R} + 2R\cdot\sin\frac{2,5\pi}{R}$

$f(R) = R\cdot\sin\frac{t}{R}$

$f'(R) = \sin\frac{t}{R} - \frac{t}{R}\cdot\cos\frac{t}{R}$

$\sin\frac{t}{R} - \frac{t}{R}\cdot\cos\frac{t}{R}$

Какие значения может принимать

$\frac{t}{R} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{R}$ - угол в I ч.

$\sin\frac{t}{R} - \frac{t}{R}\cdot\cos\frac{t}{R} > 0$

$\sin\frac{t}{R} > \frac{t}{R}\cdot\cos\frac{t}{R} \;\Big|\; : \cos\frac{t}{R} > 0$

$tg\frac{t}{R} > \frac{t}{R}$ → верно всегда

$\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{t}{R} = x$, тогда

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

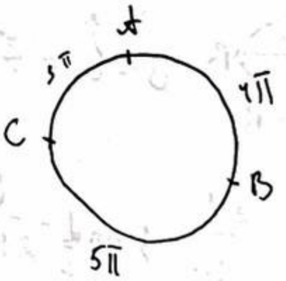
N5 (прод. 2) Чистовик. 8

в I ч. $\operatorname{tg} x \ge x \ge \sin x$ =>

=> $\operatorname{tg}\frac{A}{R} > \frac{A}{R}$ - верно => $y'(R) > 0$ => $y(R)$ - мон. возр. ф-ция

Итого: P_{ABC} - сумма возраст. ф-ций => min будет при min R

Найдём R: по п.(2) $R_{min} = 6$, $C = 12\pi$



-> расп. о. от-но друг друга

при уменьшении R, C ↓ =>

расстояния м/д точками тоже будут умень.

4) $P_{ABC} = 2R\left(\sin\frac{2\pi}{R} + \sin\frac{2{,}5\pi}{R} + \sin\frac{1{,}5\pi}{R}\right)$

$P_{ABC} = 12\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{3\pi}{12}\right)$

$P_{ABC} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 12\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) =$

$= 3\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$

Ответ: $3\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$