95 (девяносто пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Работа сдана досрочно в 13:55

0 193467 340007

19-34-67-34
(119.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Манджиев Темир Сангаджиевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
19-34-67-34	119	14	21	21	21	21	21	X	X

Оценка 95 баллов

95 (девяносто пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

19-34-67-34 (119.1)

1) допустим $p>2$ и $q>2$, тогда: p и q - нечёт
$\Downarrow$
p^q и q^p - нечёт.

$p^q - q^p + 3$ - нечёт.

2^{p-1} : т.к. $p>1 \Rightarrow 2^{p-1}$ - чёт

значит, что p или $q = 2$

допустим $p=2$:

$2^q - q^2 + 3 = 2^1$

$q^2 - 2^q = 1$

заметим, что при $q \geq 5$: $2^q > q^2$

остаётся два варианта:

$q=3$: $3^2 - 2^3 = 1$ - это верно

$q=2$: $2^2 - 2^2 = 1$ - ложное

подходит: $p=2$; $q=3$

допустим $q=2$:

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 + 3 = 2^{p-1} + 2^p = 2^{p-1}(1+2) \vdots 3$

$p^2+3 \vdots 3 \Rightarrow p^2 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p=3$

$3^2 - 2^3 + 3 = 2^2$ - это верно

подходит: $p=3$; $q=2$

$(2;3)$ и $(3;2)$

2) ~~построим~~ введём граф: перекрёстки - вершины, участки дорог ~~(как в усл~~ (определены как в условии) — рёбра

в графе: 230 вершин и $9\cdot 23 + 10 \cdot 22$ рёбер (427 рёбер)

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\, 18 \\ \hline 207 \\ +\,220 \\ \hline 427 \end{array}$$

г) т.к. мин. связн. граф - дерево => ~~на~~ можно удалить (продолжение) все рёбра кроме 229 (т.к. в дереве рёбер на одно меньше, чем вершин)

тогда $427 - 229 = 198$ рёбер можно удалить

пример: удалим дороги проспектов 1-9 включит.

з) пусть изначально лежит один пакет; каждым действием можно вставить 5 пакетов в один пустой

это значит, что каждым действием пакетов $-1+5$ пустых

всего пустых пакетов - 101, изначально - 1 => 25 раз добавили пакеты

$1 + 25 \cdot 5 = 1 + 125 = 126$ пакетов всего

и) докажем, что b_n - степень двойки:

$b_4 = \frac{2^3 \cdot 2}{1} = 2^4$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$, где $n \geq 5$ - степень двойки т.к. это перемножение степеней двойки (по индукции)

представим $b_n = 2^k$

по индукции докажем, что $k = (n-2)^2$ (при $n \geq 2$)

~~$b_n = 2^4 =$~~

база: $n \in [2; 4]$ - выполняется

шаг:

$$b_n = 2^k = \frac{2^{(n-5)^2} \cdot 2^{3(n-3)^2}}{2^{3(n-4)^2}} = 2^{((n-5)^2 + 3(n-3)^2 - 3(n-4)^2)}$$

$$k = (n-5)^2 + 3(n-3)^2 - 3(n-4)^2 = n^2 - 10n + 25 + 3n^2 - 18n + 27 - 3n^2 + 24n - 48 = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$$

19-34-67-34
(119.1)

4) (продолжение) это значит, что $b_n = 2^{(n-2)^2} \Rightarrow b_{2023} = 2^{(2021^2)}$

5) покорноворобьиный горн

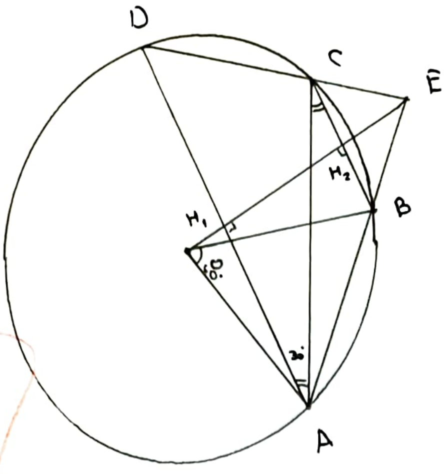
О ×5
п ×1
к ×1
р ×3
н ×1
в ×2
б ×1
ь ×1
ё ×1
й ×2
г ×1

стратегия за Алису: удалим 3 буквы „О" и объединим все буквы в пары („о", „п", „р" остаются в тройке)

- допустим ~~Петя~~ Боря ходит в „опр" → либо появляется две равных буквы, либо одна из них полностью исчезает.
  в первом случае:
  удалим полностью третью букву и объеденим те две в пару
  во втором случае:
  приравняем две оставшиеся и объединим их в пару
- если Боря ходит в пару, то делаем такое же действие с ~~одно~~ парной буквой в паре с ним

Т.к. в итоге все буквы разобьются на пары, то Алиса победит.

6)



$\angle DAC = 30°$ т.к. это $\frac{1}{2} \angle BOA$

~~AH~~

$H_1H_2 = AC \cdot \sin 30° = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$

$CH_2 + H_1A = AC \cdot \cos 30° = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

$\frac{EC}{ED} = \cancel{A} \frac{CB}{DA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{H_2E}{H_1H_2} = \frac{1}{3}$

$\frac{H_1H_2}{H_1E} = \frac{3}{4} \Rightarrow H_1E = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20$

$CH_2 + H_1A = 15\sqrt{3}$

$CH_2 = \frac{1}{4} H_1A$

$\frac{5}{4} H_1A = 15\sqrt{3}$

$H_1A = 12\sqrt{3}$

$S_{AED} = \frac{AD \cdot EH_1}{2} = H_1A \cdot EH_1 = 12\sqrt{3} \cdot 20 = 240\sqrt{3}$