0830749980000

83-07-49-98

(123.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Сметанина Григория Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
83-07-49-98	95	20	20	20	20	10	5		

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 95 (девяносто пять)

83-07-49-98 (123.1)

Чистовик

№1

$1-\sqrt{2}\sin x(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x-\sin x)=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$1+2\sqrt{2}\cos^2 x-2\sqrt{2}\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x\cos x=1+\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$

$4\cos 2x-\cos 2x=2\sin 2x+\sin 2x$

$3\cos 2x=3\sin 2x$

$\sin 2x=\cos 2x$

$\cos 2x=0$ не подх $\Rightarrow$ $\cos 2x\neq 0$

$tg\, 2x=1$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k\Rightarrow$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k\ (\pi\in Z)$ Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in Z)$.

№2.

A ——— l ——— B

На прохождение пути без остановок мотоциклист тратит меньше времени $\Rightarrow$

Он либо выехал на час позже, чем велос. и ~~либо выех~~ сделал остановку

либо выехал на час раньше, чем велос. и сделал остановку.

Иначе ~~[illegible]~~ у мотоциклиста будет преимущество минимум в час и он прибудет в B раньше велос.

~~в (1) случае~~ Пусть скорости мот. и велос. x и y соответственно; $x=2y$.

$AB=l$

в (1) случае: $\frac{l}{x}+3=\frac{l}{y}$; Время прибытия: $13_ч+\frac{l}{y}=13+6=19_ч:00_м$.

$l+6y=2l$

$y=\frac{1}{6}l\Rightarrow\frac{l}{y}=6$

чистовик

во (2) случае: $\frac{l}{x}+1=\frac{l}{y}$; время прибытия:

$13+1+\frac{l}{y}=14+2=\underline{16}$

$2y=l$

$\frac{l}{y}=2 \Rightarrow$ велосипедист проезжает AB за 2 часа

$\frac{l}{x}=\frac{l}{2y}=1 \Rightarrow$ мотоциклист проезжает AB за 1 час

пример для (1):
велосипед. выезжает в 13:00 и приезжает в 19:00
мот. выезжает в 14:00, сразу делает остановку до 16:00 и приезжает в 19:00

пример для (2):
велосипед выезжает в 14:00 и приезжает в 16:00
мот. выезжает в 13:00, сразу делает остановку до 15:00 и приезжает в 16:00

Ответ: в 19:00 или в 16:00.

N3. Т.к. корни x_1, x_2, x_3 существуют, то применима теорема Виета $\Rightarrow$

$$x_1+x_2+x_3=6$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$$
$$x_1x_2x_3=1$$

если корни $= x_1+x_2$, x_2+x_3 и x_3+x_1, то

$$-a=2(x_1+x_2+x_3)=12 \Rightarrow a=-12$$

$$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$$
$$=x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3+$$
$$+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_3^2=$$
$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3$$

т.к. $(x_1+x_2+x_3)^2=36$, т.е.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=36,$$ то

$$b=36+7=\underline{43}$$

ЧИСТОВИК

$-C = (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 +$

$+ x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 2x_1x_2x_3$

т.к. $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = 42$, т.е.

$x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 +$

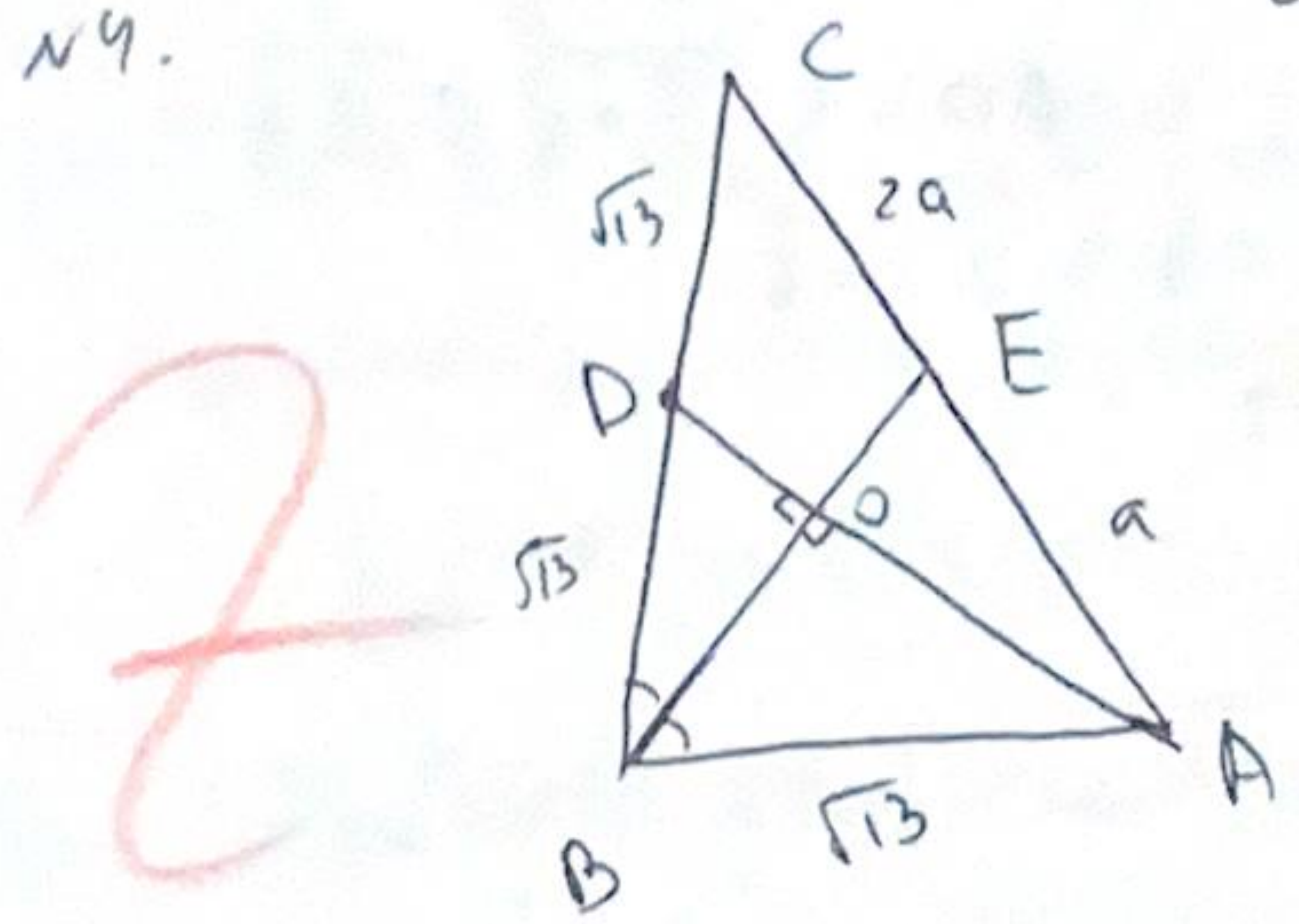
$+ x_1x_2x_3 = 42$, то

$-C = 42 - x_1x_2x_3 = 41 \Rightarrow C = -41$

$x^3 - 12x^2 + 43x - 41 = 0$ – искомое уравнение

Ответ: $-12; 43; -41$.

№4.



Пусть $BE \cap AD$ в (·) O

в $\triangle ABD$: BO – биссектриса и высота $\Rightarrow$

$\triangle ABD$ равнобедр. по признаку равнобедр. $\triangle$ $\Rightarrow$

$BD = AB = \sqrt{13}$

т.к. $BD = DC$, то $BC = 2\sqrt{13}$

По св-ву биссектрисы

$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Пусть $AE = a$; $EC = 2a$, тогда по формуле бисс:

$BE = \sqrt{AB \cdot BC - AE \cdot EC} = \sqrt{26 - 2a^2}$

т.к. $AD = BE$, то $OD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BE = \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{a^2}{2}} \Rightarrow$

по т. Пифагора для $\triangle BOD$:

$BO^2 = 13 - \frac{13}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{13}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$OE = BE - BO = \sqrt{26 - 2a^2} - \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{a^2}{2}}$

по т. Пифагора для $\triangle EOA$:

$a^2 = AO^2 + OE^2$

$a^2 = \frac{13}{2} - \frac{a^2}{2} + 26 - 2a^2 + \frac{13}{2} + \frac{a^2}{2} - 2\sqrt{(26-2a^2)(\frac{13}{2} + \frac{a^2}{2})}$

$3a^2 = 39 - \sqrt{26^2 - 4a^4}$ $a^2 < \sqrt{13}$

$39 - 3a^2 = \sqrt{26^2 - 4a^4} \Rightarrow$

~~$39^2 - 2 \cdot 39a^2 + 9a^4 = 26^2 - 4a^4$~~

ЧИСТОВИК

~~$13a^2 - 9 \cdot 39a + 39^2 - 26^2$~~

$39^2 - 6 \cdot 39a^2 + 9a^4 = 26^2 - 4a^4$

$13a^4 - 6 \cdot 13 \cdot 3a^2 + 13 \cdot 3 \cdot 39 - 13 \cdot 2 \cdot 26 = 0$

$a^4 - 18a^2 + 117 - 52 = 0$

$a^4 - 18a^2 + 65 = 0$

$(a^2 - 5)(a^2 - 13) = 0$

$a = \sqrt{5}$ $\qquad a = \sqrt{13}$

не подх. $(a > \sqrt{13})$

$(\sqrt{13} > \sqrt{13})$

Площадь $\triangle ABC$: $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ADB}$ (по св-ву медианы)

$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6$

$S_{ABC} = 12$

Ответ: 12

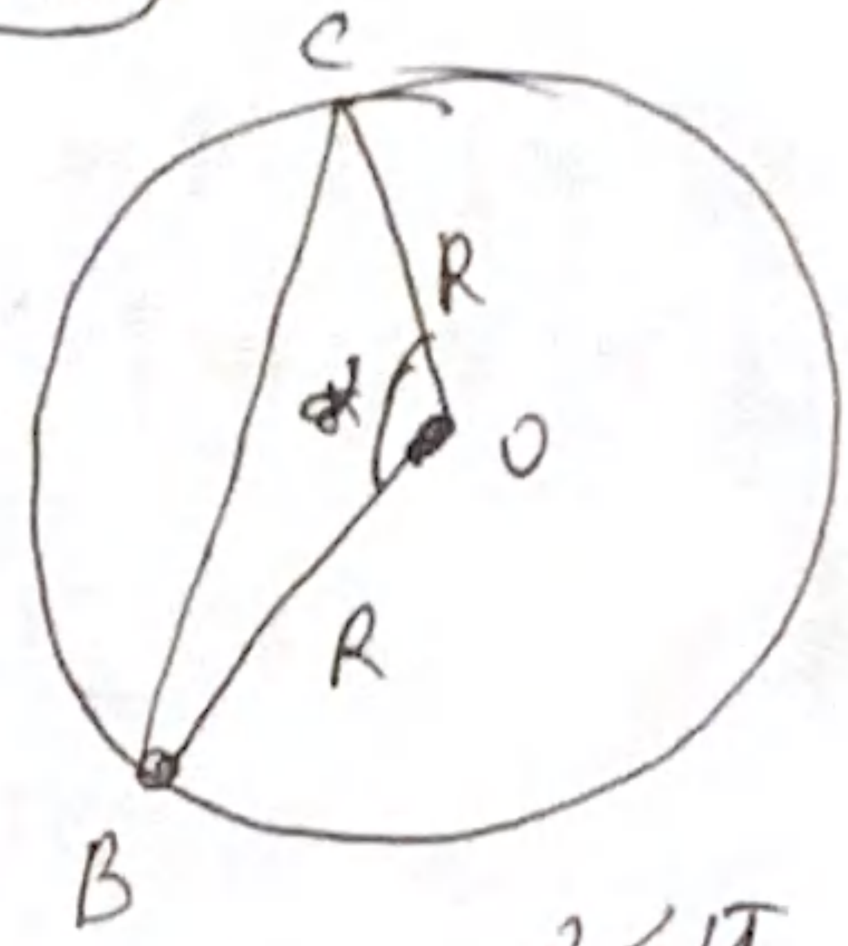
83-07-49-98 (123.1)

Черновик

№5.

~~обозначим~~

Кратчайшее расстояние — это дуга, соед. две точки в окружности содержащей центр. (дуга, меньшая или равная π)



Обозначим центр окр-ти за O, $\alpha \le \pi$

угол BOC за α; $\angle AOC = \beta$; $\angle AOB = \gamma$

Тогда $|\overset{\frown}{BC}| = 10\pi = \alpha R$
$|\overset{\frown}{AC}| = 8\pi = \beta R$
$|\overset{\frown}{AB}| = 6\pi = \gamma R$
$\Rightarrow \beta = 0{,}8\alpha = \frac{4}{5}\alpha$
$\gamma = 0{,}6\alpha = \frac{3}{5}\alpha$

$BC = 2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; $AC = 2R\sin\frac{\beta}{2}$; $AB = 2R\sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow$

периметр $ABC = 2R(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}) \Rightarrow$

~~$P_{ABC} = 2R(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{4\alpha}{10} + \sin\frac{3\alpha}{10})$~~ $\alpha = \frac{10\pi}{R}$

$\beta = \frac{8\pi}{R}$

$\gamma = \frac{6\pi}{R}$

~~$P'_{ABC}(\alpha) = 2R\cdot(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{4}{10}\cos$~~

~~$P'_{ABC}(\alpha) = 2R\cdot((\cos\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{1}{2} + (\cos\frac{2\alpha}{5})\cdot\frac{2}{5} + (\cos\frac{3\alpha}{10})\cdot\frac{3}{10}) = 0$~~

~~$5\cos\frac{\alpha}{2} + 4\cos\frac{2\alpha}{5} + 3\cos\frac{3\alpha}{10} = 0$~~ ~~$\frac{\alpha}{10} = t$, $t < \frac{\pi}{10}$~~

~~$5\cos 5t + 4\cos 4t + 3\cos 3t = 0$~~

~~$5\cos 5t + 4\cos 4t + 3\cos 3t > 0$~~

~~$\frac{1}{R} = t$ $P_{ABC} = \frac{2}{t}(\sin(5\pi t) + \sin 4\pi t + \sin 3\pi t)$~~

~~$P'_{ABC} = \frac{10\pi\cos(5\pi t)\cdot t - 2\sin(5\pi t)}{t^2} + \frac{8\pi\cos(4\pi t)\cdot t - 2\sin(4\pi t)}{t^2} + \frac{6\pi\cos(3\pi t)\cdot t - 2\sin 3\pi t}{t^2} = 0$~~

~~$t\cdot\pi(10\cos(5\pi t) + 8\cos(4\pi t) + 6\cos(3\pi t)) - 2(\sin 5\pi t + \sin 4\pi t + \sin 3\pi t) = 0$~~

$\pi t = x$ $P_{ABC} = 2R(\sin\frac{5\pi}{R} + \sin\frac{4\pi}{R} + \sin\frac{3\pi}{R})$

$P'_{ABC} = 2R\cdot\cos\frac{5\pi}{R}(-\frac{5\pi}{R^2}) + 2\sin\frac{5\pi}{R} + \ldots = 0$

$5\pi\cdot\cos\frac{5\pi}{R} + 4\pi\cdot\cos\frac{4\pi}{R} + 3\pi\cdot\cos\frac{3\pi}{R} - R(\sin\frac{5\pi}{R} + \sin\frac{4\pi}{R} + \sin\frac{3\pi}{R}) = 0$

чистовик

$$\pi\left(5\left(\cos\frac{4\pi}{R}\cdot\cos\frac{\pi}{R}-\sin\frac{4\pi}{R}\cdot\sin\frac{\pi}{R}\right)+4\cos\frac{4\pi}{R}+3\left(\cos\frac{4\pi}{R}\cdot\cos\frac{\pi}{R}+\sin\frac{4\pi}{R}\cdot\sin\frac{\pi}{R}\right)\right)-$$

$$-R\left(\sin\frac{4\pi}{R}\left(2\cos\frac{\pi}{R}+1\right)\right)=0$$

$\frac{\pi}{R}=t$ $\quad t(8\cos 4t\cdot\cos t-2\sin 4t\sin t+4\cos 4t)-$

$$-\sin 4t(\cos t+1)=0$$

~~т~~ максимальный $t=\frac{\pi}{12}$ *

$$\frac{\pi}{12}\left(8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}-2\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt3}{2}\left(\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}+1\right)=$$

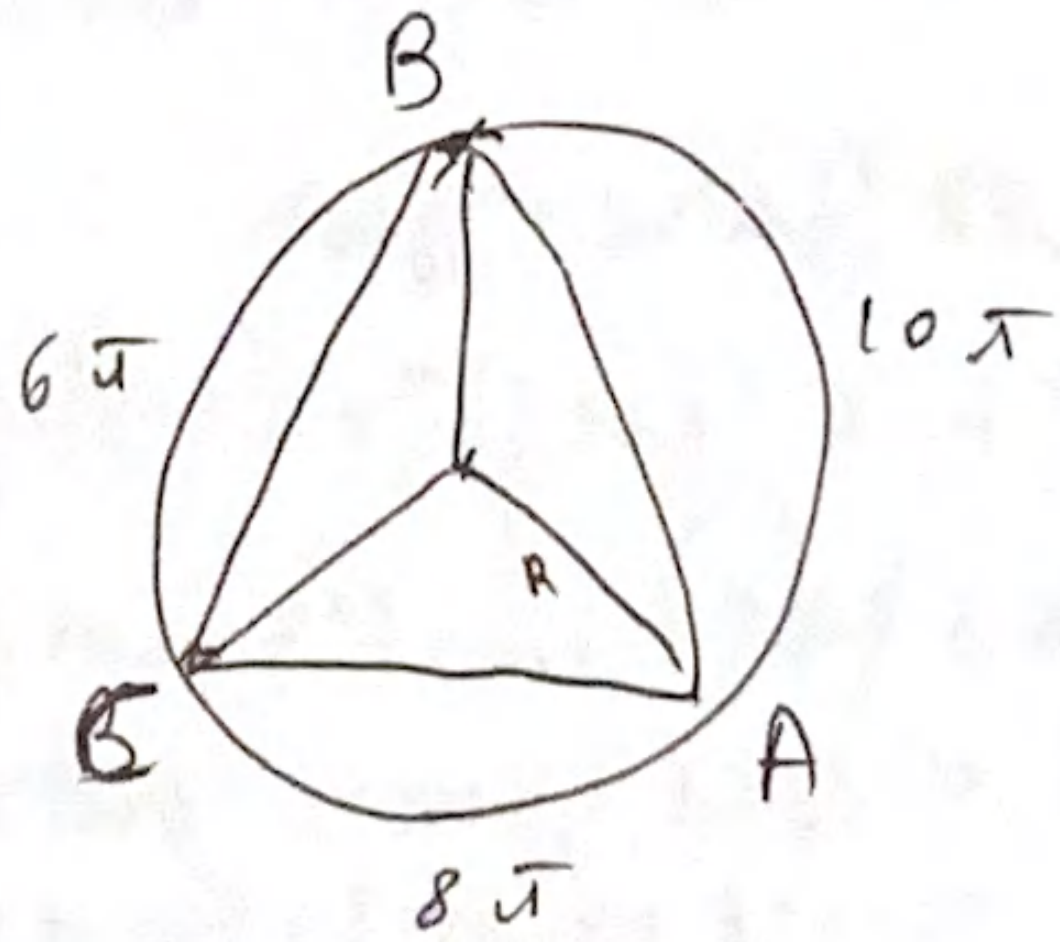
$$=\frac{\pi}{12}\left(\sqrt6+\sqrt2+2-\frac{3-\sqrt3}{2\sqrt2}\right)-\frac{3+\sqrt3}{4\sqrt2}-\frac{\sqrt3}{2}<0$$

при $t<\frac{\pi}{12}$ ~~$P'(t)$ тоже <0 ⇒~~ $P'(t)$ сначала >0, а потом <0 ⇒ $\max P(t)$ достигается в $t=\frac{\pi}{12}$

---

*: ~~так~~ минимальный R при $A, B, C, O \in$ одной окр-ти

т.е. $\triangle ABC$ вписан в окр-ть с радиусом R:



$R\cdot 2\pi=24\pi$ ⇒ минимальный $R=12$ ⇒ $t_{макс}=\frac{\pi}{12}$

$$P=2\cdot12(\sin75^\circ+\sin60^\circ+\sin45^\circ)=$$

$$=24\cdot\sin60^\circ(2\cos15^\circ+1)=12\sqrt3\left(\frac{\sqrt3+1}{\sqrt2}+1\right)=$$

$$=6\sqrt6(\sqrt3+1+\sqrt2)=\underline{18\sqrt2+12\sqrt3+6\sqrt6}$$

Ответ: $18\sqrt2+12\sqrt3+6\sqrt6$.

Чистовик

N6

У N_{min} 1877 делителей

если 1877: $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} = p_3 \cdot p_4 \cdot \frac{N}{p_2} \cdot N > N^2$

если 1878: $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} = p_3 \cdot p_4 \cdot \frac{N}{p_3} \cdot \frac{N}{p_2} > N^2$

если 1879: $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} = p_3 \cdot p_4 \cdot \frac{N}{p_4} \cdot \frac{N}{p_3} = N^2$

если больше, то нер-во не выполн.

~~1877~~: если $N = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_3^{\alpha_3} \ldots q_t^{\alpha_t}$

где $q_1, q_2 \ldots q_t$ - простые делители N, а α_1, α_2 - соответ. степени, то

$\sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_t+1)$

1877 - простое $\Rightarrow \sigma(N) = (\alpha_1+1) \Rightarrow$

$N = q_1^{\alpha_1}$; $N^3 = q_1^{3\alpha_1} \Rightarrow$

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1) =$

$= 1877 + 2 \cdot 1876 =$

$1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313 \Rightarrow$ $= 5629$

~~$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$~~ либо $N = q_1^{1877}$ 1)

либо $N = q_1^1 \cdot q_2^2 \cdot q_3^{312}$ 2)

либо $N = q_1^1 \cdot q_2^{938}$ 3)

либо $N = q_1^2 \cdot q_2^{625}$ 4)

$\sigma(N^3) =$ 1) $3 \cdot 1877 + 1 = 5632$

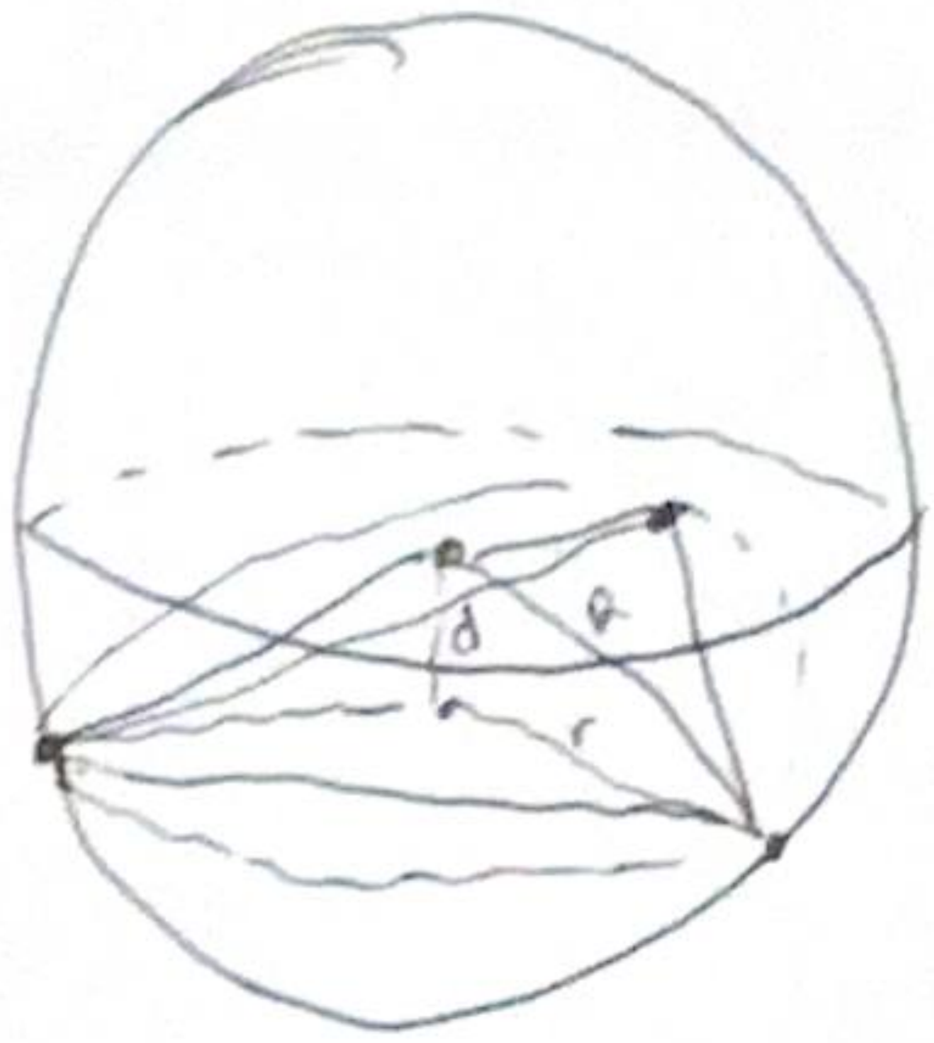
2) $4 \cdot 7 \cdot 937 = 26316$

3) ~~$2 \cdot 2939$~~ $4 \cdot (3 \cdot 938 + 1) = 11260$

4) $7\,(3 \cdot 675 + 1) = 13132$

1879 = простое $\Rightarrow N = q_1^{1878} \Rightarrow \sigma(N^3) = 3 \cdot 1878 + 1 = 5635$

Ответ: 5629; 5632; 5635; 11260; 13132; 26316



129 ~~125~~

192 215
164

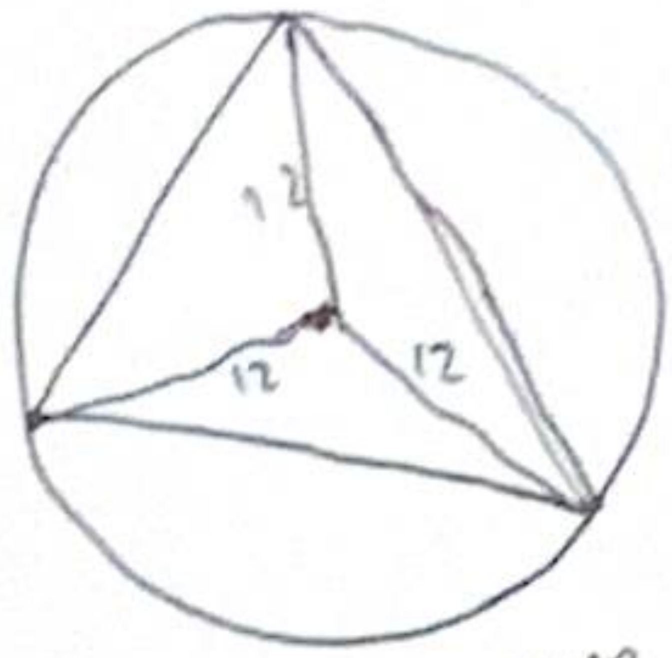
184

$r=\sqrt{R^2-d^2}$

210+49=879
162 51

$R\cdot 2\pi = 24\pi$

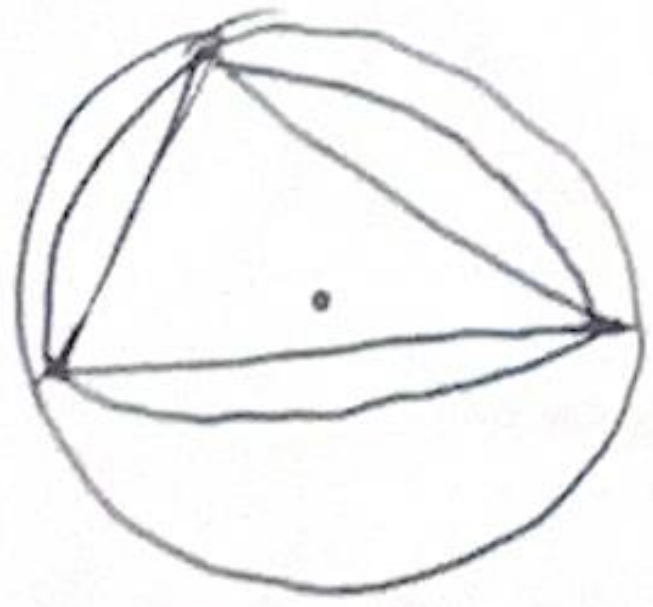
$R=12$ 181



184
54 181
23·7=140+21

186 ~~185~~
~~185~~

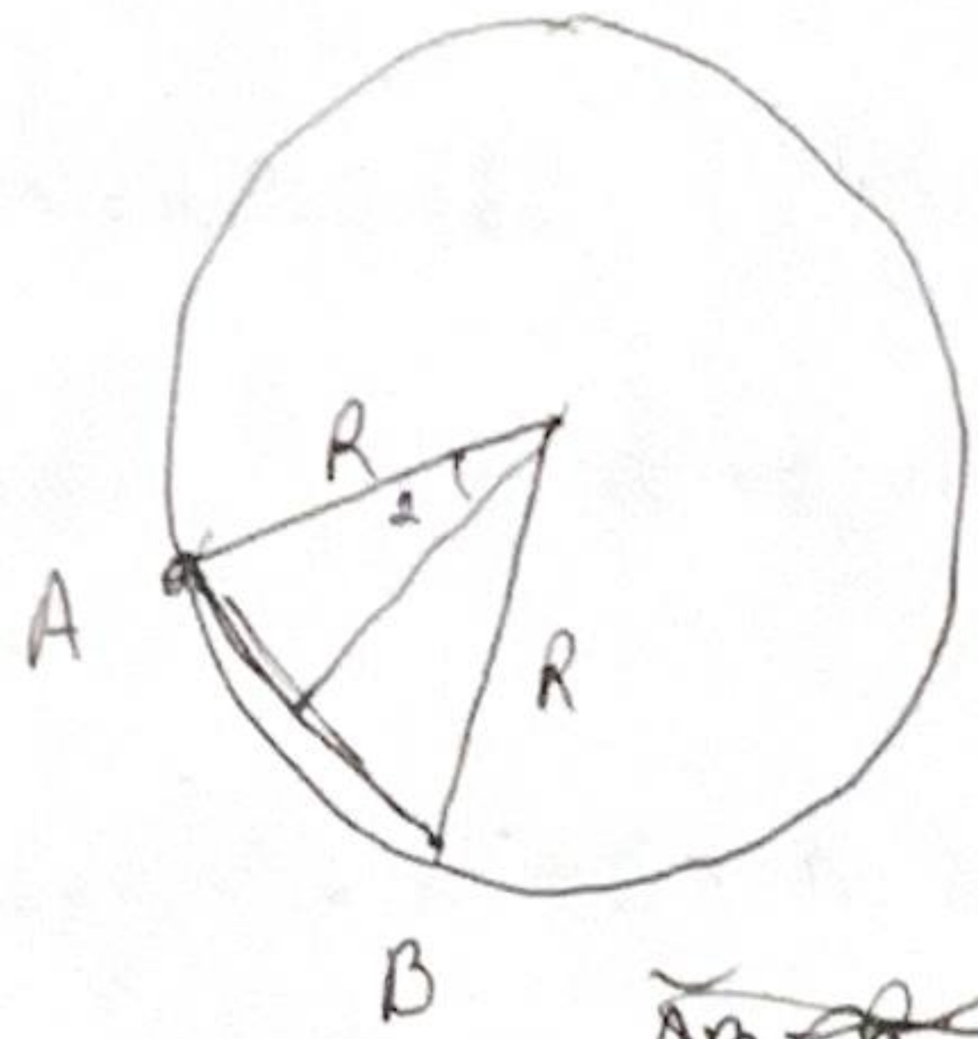
~~171+100~~
~~271~~



1879:
~~2~~ ~~3~~ ~~5~~ ~~7~~ ~~11~~ ~~13~~ ~~17~~ ~~19~~
~~21~~ ~~23~~ ~~29~~ ~~31~~ ~~37~~ ~~39~~ ~~41~~
~~43~~

ЧЕРНОВИК

$$\begin{array}{r} \times\ 937 \\ 28 \\ \hline 7576 \\ 1874\ \ \\ \hline 26316 \end{array}$$



$\pi = 180°$

$\alpha = \frac{5}{6}\pi = 150°$

$\beta = 120°$

$\gamma = 90°$

$\alpha, \beta, \gamma \leq \pi$

$AB = 2R\sin\frac{\gamma}{2}$

$BC = 2R\sin\frac{\beta}{2}$

$BC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$

$\times\ 937$ / 7

$\cancel{AB = R\frac{\alpha}{2\pi}}$

$\overset{\frown}{AB} = 2\pi R \cdot \frac{\gamma}{2\pi} = \gamma R = 6\pi$

$\gamma = \frac{3}{5}\pi$

$\overset{\frown}{AC} = \beta R = 8\pi$

$\overset{\frown}{BC} = \alpha R = 10\pi$

$\alpha = \pi$

$R = 10$

$\beta = \frac{8}{10}\pi = \frac{4}{5}\pi$

$\gamma = \frac{3}{5}\pi$

$180° \cdot \frac{3}{5} =$

$=$

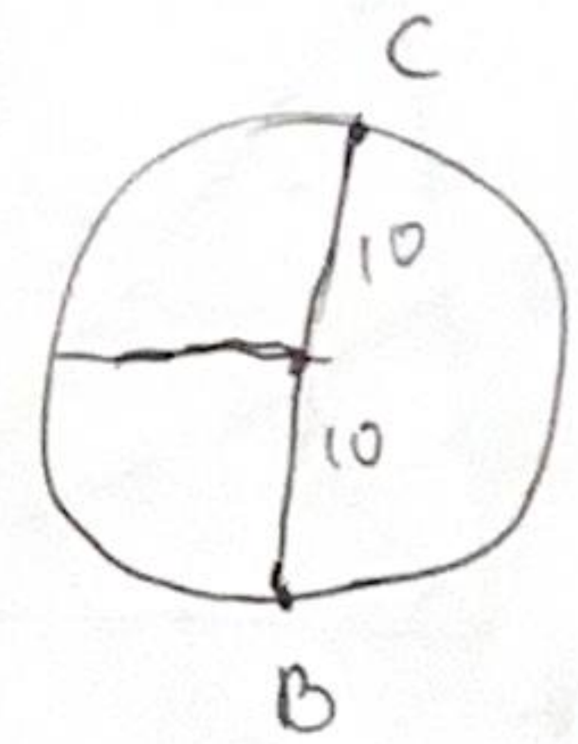
$\cos\alpha + \cos\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ $\quad 2\sin\frac{4\pi}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{5}$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) =$

$2\cos x\cos y$ $\quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$



$$\begin{array}{r} 3752 \\ +\ 1877 \\ \hline 5629 \end{array}$$

$\alpha = \pi$

$R = 10$ $\quad BC = 20$

$24(\sin 75° + \sin 60° + \sin 45°) =$

$= 24 \cdot 2(\sin 60)(2\cos 15° + 1)$

$$\begin{array}{r} \times\ 1876 \\ 2 \\ \hline 3752 \end{array}$$

$\alpha \to 0$

$R \to \infty$

1879

~~BC~~

$AB + BC + AC = 24\pi$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2700 + 90 + 24 =$

$= 2814$

$2\sin 15\cos 15 = \frac{1}{2}$

$\cos^2 15 - \sin^2 15 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 \ldots + \sin^2 = 1$

sin

$\sin 15 + \cos 15 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\cos^2 15 = \frac{\sqrt{3}+2}{4} =$

$= \frac{2\sqrt{3}+4}{8} =$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$

938

313

$$\begin{array}{r} \times\ 2815 \\ 4 \\ \hline 11260 \end{array}$$

$1800 + 75 + 1$

$$\begin{array}{r} \times\ 1876 \\ 7 \\ \hline 13132 \end{array}$$

$\cos 15 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 15 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

ЧЕРНОВИК

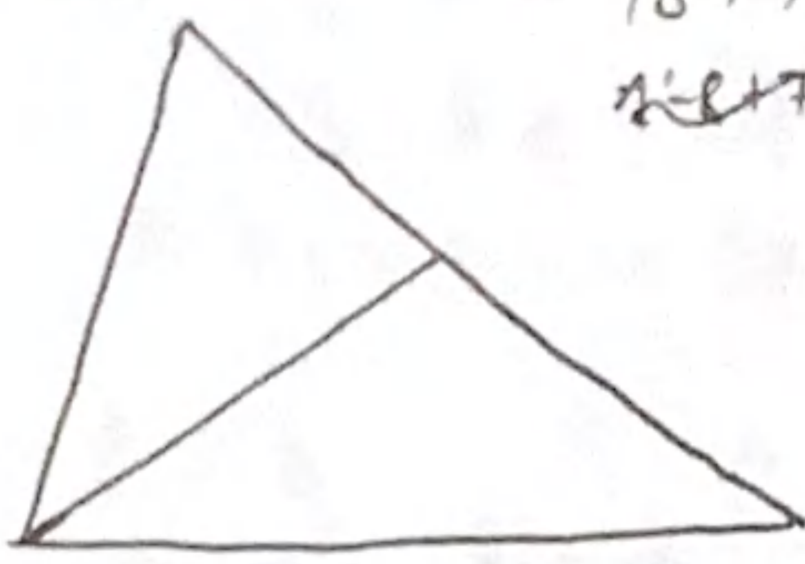
№1

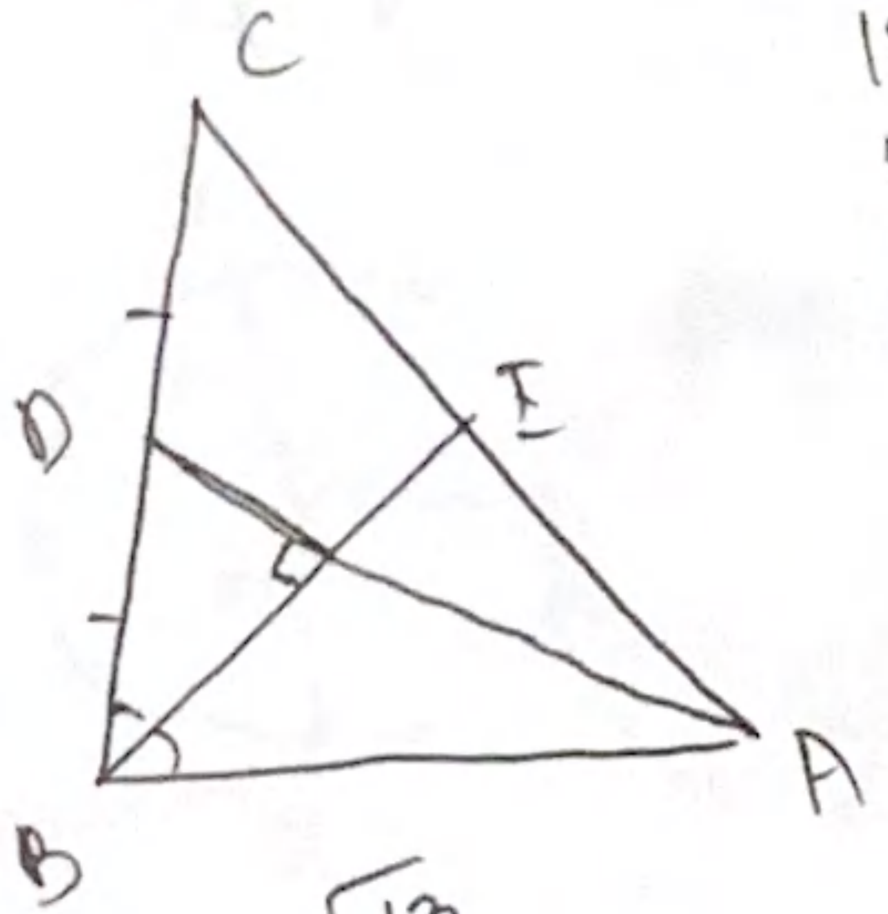
$1 + 2\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sqrt{2}\cos x \sin x = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

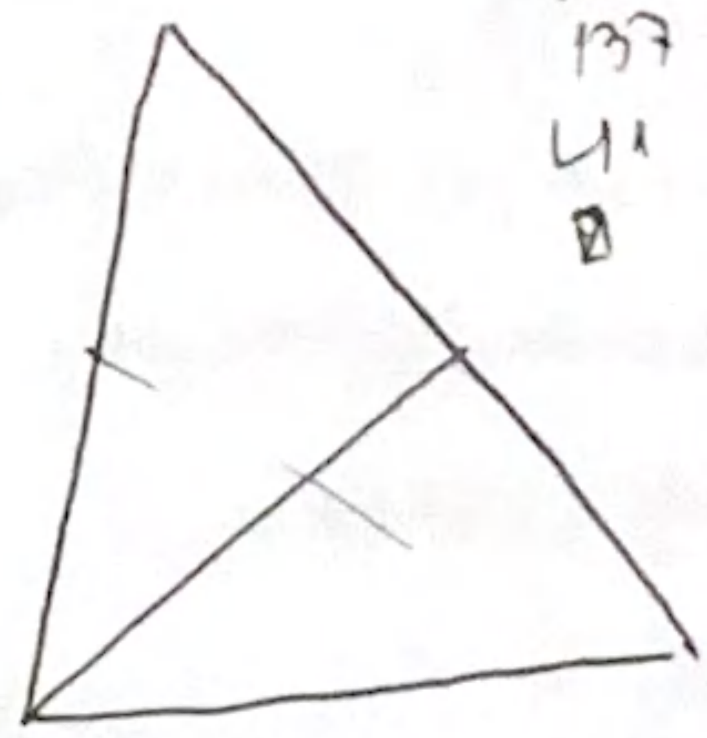
$2\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x =$

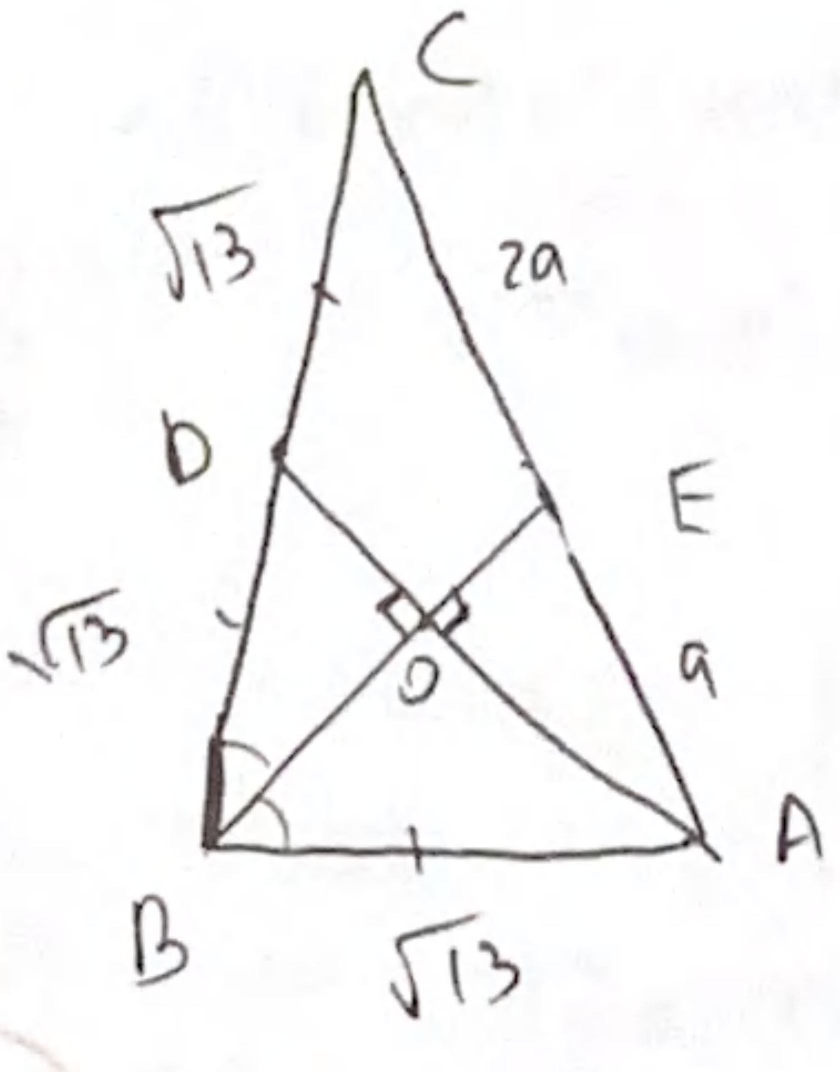
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3$

1877. 1890 17 19 23 29 31 1900 1900 962 1974 1450 37 427 137 184 111 43 192 160+12 452 47?









$BE = \sqrt{26 - 2a^2}$

$BO = \sqrt{13 - DO^2} =$

$= \sqrt{13 - \frac{13}{2} + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{a^2}{2}}$

$OE = BE - BO = \ldots$