59-28-52-88
(117.2)

0 592852 880003

Дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Щавелева Павла Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	~~7~~	~~8~~
59-28-52-88	105	21	0	21	21	21	21		

Оценка 99 баллов.

99 (девяносто девять)

59-28-52-88 (1172)

№1

Будем постепенно конструировать сеть пакетов. Изначально у нас 1 пустой пакет.
Мы можем взять любой пустой пакет и положить в него 5 пустых пакетов. Тогда общее количество пустых пакетов увеличится на 4.
Пусть такую операцию проделали x раз. Тогда пустых пакетов ровно $4x+1$ (1-начальный пакет), что равно 101.

$4x+1=101$
$4x=100$
$x=25$.

Заметим, что каждую операцию общее количество пакетов увеличивается на 5. Тогда всего $5x+1=126$ пакетов.
Ответ: 126.

№3

$p^q-q^p+3=2^{p-1}$
$p^q-q^p=2^{p-1}-3$.
Заметим, что 2^{p+1} - всегда чётное (т.к. $p\geq 2$), а 3-нечётное. Тогда p^q-q^p - нечётное. Есть 2 варианта:
1: p^q-четное, q^p-нечетное
2: p^q-нечетное, q^p-четное

1 Вариант

$p=2$ (т.к. это единственное четное простое число)
$2^q-q^p=2^{2-1}-3$
$2^q-q^p=-1$
$2^q+1=q^2$.
q-нечетное, т.к. $q=2$ очевидно не подходит.
Пусть $q=1+2n$. Тогда
$2^q+1=2\cdot 2^{2n}+1=2\cdot 4^n+1\underset{(mod\,3)}{\equiv}2\cdot 1^n+1\equiv 2+1\equiv 0 \pmod 3$

Тогда $q^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow q \vdots 3 \Rightarrow q=3$ стр. 2/4

Вариант 2.

$q=2$

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$

$p^2+3=2^{p-1}+2\cdot 2^{p-1}$

$p^2=3\cdot 2^{p-1}-3 \equiv 0 \pmod 3$

$p^2 \equiv 0 \pmod 3$

$p \vdots 3$

$p=3$

Ответ: $p=2$; $q=3$ и $p=3$; $q=2$ (легко проверить, что оба варианта подходят).

№4

Рассмотрим граф, где вершины — это перекрёстки, а рёбра — дороги между соседними перекрёстками.
Тогда в нём $23\cdot 10=230$ вершин.
Чтобы граф оставался связанным в нем должно быть хотя бы $230-1=229$ рёбер.
Всего было $22\cdot 10+23\cdot 9=220+207=427$ дорог
$427-229=198$ дорог можно ремонтировать
Пример: можно чинить все участки на улицах от 2 до 23. $22\cdot 9=198$. Тогда от любого перекрёстка можно добраться до улицы №1, а от туда до любого проспекта.
Ответ: 198.

№6

Разобьём все возможные позиция на 3 типа (позиция — это пара текущей надписи и игрока, который должен сделать ход):
1. „Ал" (в которых у Алисы есть выигрышная стратегия
2. „Бо" (в которых у Бори есть выигрышная стратегия
3. „Не" (в которых у обоих игроков нет выигрышных стратегий)

Рассмотрим любую „Не" позицию: стр. 3/4

1. В ней должна быть хотя бы одна незачеркнутая буква, иначе у позиции есть выигрышная стратегия за противника человеку, который сейчас не может сходить.

2. Если сейчас ходит человек X, то после любого хода этот человек не может выиграть (гарантированно), иначе это будет позиция „Ан" или „Бо"!

3. Во всех позициях не может противник X, иначе это не „Не" позиция, а позиция противника.

Значит в „Не" позиции всегда существует ход, который ведёт также к „Не" позиции.

Пусть начальная позиция - „Не" позиция. В начале 19 букв, значит должна существовать позиция с 18 или меньше буквами, которая „Не" позиция ⇒ существует „Не" позиция с ≤17 буквами и т.д. В итоге выходит, что существует „Не" позиция со буквами, что невозможно т.к. в ней кто-то выигрывает.

Значит предположение было неверным и начальная позиция - точно не „Не". ч.т.д.

№ 5

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

$$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}.$$

Введём новую последовательность x, так чтобы $b_n = 2^{x_n}$. Тогда $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

$$2^{x_n} = \frac{2^{x_{n-3}} \cdot (2^{x_{n-1}})^3}{(2^{x_{n-2}})^3} = \frac{2^{x_{n-3}} \cdot 2^{3x_{n-1}}}{2^{3x_{n-2}}} = 2^{x_{n-3} + 3x_{n-1} - 3x_{n-2}}$$

$$x_n = x_{n-3} + 3x_{n-1} - 3x_{n-2}$$

Введём новую последовательность y, такую что $y_n^2 = x_n$. Тогда $y_1=-1$; $y_2=0$; $y_3=1$. Тогда

$y_n^2 = 3y_{n-1}^2 + y_{n-3}^2 - 3y_{n-2}^2$

легко заметить, что если y_{n-3}; y_{n-2} и y_{n-1} - последовательные числа, то y_n - будет следующим.

Т.к. y_1; y_2; y_3 - идут подряд, то $y_n = y_{n-1}+1$.

Тогда $y_{2023} = 2021$.

$x_{2023} = y_{2023}^2 = 2021^2$

$b_{2023} = 2^{x_{2023}} = 2^{(2021^2)}$

Ответ: $b_{2023} = 2^{(2021^2)}$.

№2

Тут много чисел и если всё привести к одному знаменателю он будет 400!, ну и после сокращений скорее всего в a будут множители 601. Так что $a \vdots 601$.

Ответ: 0.

ЧЕРНОВИК

ПП $\cancel{10} + 10 \cdot 22 = \cancel{240}\ \cancel{238}$ $\quad 9 + 10 \cdot 22 = 229$

Е $\cancel{23} + 23 \cdot 9$ $\quad$ $23 \times 9 = 207$ $\quad 22 + 23 \cdot 9 = 229$

$23 \cdot 9 + 10 \cdot 22 = 207 + 220 = 427$

~~$23 \cdot 10 = 400 + 9 + 22 =$~~

$22 \cdot 9 = 198 \quad 2 \cdot 198 + 22 + 9 = 396 + 22 + 9 = 400 + 18 + 9 = 427$

$427 - 229 = 198 \qquad 22 \cdot 9 = 198$

ЧЕРНОВИК

$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots$

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=$

$\frac{400!}{400!}-\frac{400!:2}{400!}+\frac{400!:3}{400!}$

$\frac{1\cdot\ldots\cdot400}{400!}-\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot400}{400!}+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot400}{400!}\ldots=$

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8}+\ldots+\frac{1}{399\cdot400}$

$\frac{3\cdot4\ldots400}{400!}+\frac{1\cdot2\cdot5\cdot\ldots400}{400!}=$

$56\cdot15=180+56=740$

$\cancel{740:36=72}$

$740:60=12{,}\ldots$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ $\quad 2\cdot2\cdot3$

$\frac{7}{12}+\frac{1}{30}=\frac{37}{60}$ $\quad 2\cdot2\cdot3\cdot5$

$\frac{37}{60}+\frac{1}{56}=$

№6

5, 3, 2, 2, 7, 4.

Алиса

П
ооооо
К
РРР
И
ВВ
Б
Ь
Е
ЫЫ
Г

№3

$p^q-q^p+3=2^{p-1}$

$\underbrace{p^q-q^p}_{н}+3=2^{p-1}$ ч н

$p^q+3=2^{p-1}+q^p$

$p\neq q$

$2^3-3^2+3=2^{2-1}$

$8-9+3=2$

$2=2$

$3^2-2^3+3=2^{3-1}$

$4=4$

$p=2\ q=3$

$\boxed{p=3\ q=2}$

1:

$2^q-q^2+3=2$

~~q-чет~~

$2^q-q^2=-1$

$2^q+1=q^2$

$q=3$

$2^q+1=q^2$ $\quad$ q-неч

$\vdots 3$

2:

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$

$p^2+3=2^{p-1}+2^p$

$\vdots 3\ \underbrace{p^2+3}=\underbrace{3\cdot2^{p-1}}_{\vdots 3}$

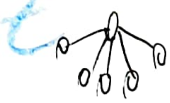
$p=3\ \vdots 3$

1: p^q-q^p ч н

2: $p^q_н-q^p_ч$

ЧЕРНОВИК

1 ✓✓✓
2
3 ✓✓✓
4 ✓✓✓
5 ✓
6 ✓✓✓



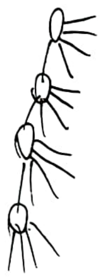
№1

$101-5=96 \mid 4$

$\underline{-8} \quad 24$

16

$1 \cdot 24 + 101 = 125$



№3

$p^q - q^p + 3 = 2p - 1$

№4

$b_1 = 2^1$

$b_2 = 2^0$

$b_3 = 2^1$

$b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3 \quad n=4 \quad$ №5

$b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3} = \frac{2 \cdot 2^3}{1^3} = 16 = 2^4$

7

$b_5 = \frac{b_2 \cdot b_4^3}{b_3^3} = \frac{1 \cdot 16^3}{2^3} = \frac{2^{12}}{2^3} = 2^9 = 512 = 2^9$

$b_6 = \frac{b_3 \cdot b_5^3}{b_4^3} = \frac{2 \cdot (2^9)^3}{(2^4)^3} = \frac{2^{28}}{2^{12}} = 2^{16}$

$\begin{array}{r} 52 \\ -27 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ -48 \\ \hline 36 \end{array}$

$b_7 = \frac{b_4 \cdot b_6^3}{b_5^3} = \frac{2^4 \cdot (2^{16})^3}{(2^9)^3} = \frac{2^4 \cdot 2^{48}}{2^{27}} = \frac{2^{52}}{2^{27}} = 2^{25}$

$2^{x_n} = \frac{2^{x_{n-3}} \cdot (2^{x_{n-1}})^3}{(2^{x_{n-2}})^3}$

$36 \quad \cancel{75} \quad \cancel{93} \quad \cancel{12}\ 48$

$\boxed{x_n = 3x_{n-1} + x_{n-3} - 3x_{n-2}}$

$2^{x_n} = \frac{2^{x_{n-1} \cdot 3 + x_{n-3}}}{2^{x_{n-2} \cdot 3}}$

$y_n^2 = 3(y_n-1)^2 + (y_n-3)^2 - 3(y_n-2)^2$

$y_n^2 = 3y_n^2 - 6y_n + 3 + y_n^2 - 6y_n + 9 - 3y_n^2 + 12y_n - 12$

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$x_3 = 1$

$x_4 = 4$

$x_5 = 9$

$x_6 = 16$

$x_7 = 25$

$x_8 = 36$

$x_4 = 3 \cdot x_3 + x_1 - 3 \cdot x_2 = 3 + 1 - 0 = 4$

$x_5 = 3 \cdot x_4 + x_2 - 3x_3 = 12 + 0 - 3 = 9$

$x_8 = 3 \cdot x_7 + x_5 - 3x_6 = 75 + 9 - 48 = 36$

$\cancel{x_n - x_{n-1} = 3x_{n-1} + x_{n-3} - 3x_{n-2} - 3x_{n-2} + x_{n-4} + 3x_{n-3}}$

$y_n^2 = 3y_{n-1}^2 +$

Выполнять задания ...