0 609986 860006

60-99-86-86
(120.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы (ПВГ)
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Большакова Михаила Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
60-99-86-86	126	21	21	21	21	21	21	X	X

Черновик

1 2 3 4 5 6 → теорема Герона, подобие

граф дерево

$b_n = 2^{(n-2)^2}$

Прохор Виноградов Федор

лидо p, либо $q = 2$

n^2+2n+1

$3n^2-6n+3 = 4n^2-4n+4$

$2-x$

$4-x$

$5-x$

$2^{(n-2)^2} \cdot 2^{(n-4)^2 \cdot 3} = 2^{(n-5)^2} \cdot 2^{(n-3)^2 \cdot 3}$

если $p=2$, то:

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q < q^2$

если $q=2$ то:

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$\boxed{q=3 \quad p=2}$

$(n+1)^2 + (n-1)^2 \cdot 3$

$(n-2)^2 + n^2 \cdot 3$

$n^2 - 4n + 4 + 3n^2$

$b_n \quad b_{n-2} \quad b_{n-3} \quad b_{n-1}$

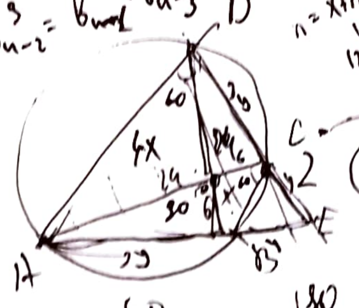
$b_4 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_3$

$b_n = 2^{(n-2)^2}$

$b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3$

$b_4 = 2^4$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-1}^3 \cdot b_{n-3}$



$3x+51 = x+101$

$1 \cdot 2^{12} = x \cdot 2^3 \quad 2x = 50$

$x = 25$

$2(n-1) = 6x+100$

$3x+50$

$2 \cdot 2^{28} = x \cdot 2^{12}$

$2^{28-12} = 2^{16}$

$3 \cdot (2^{p-1} - 1) = 58$

60

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}^3 = b_{x+2} \cdot b_x^3$

$3 \cdot 2^{p-1} - 3 = p^2$

$3 \cdot (2^{p-1} - 1) = p^2$

$2(n-1)$

$(x-1)6 + 5x + 101$

$6x + 100 = 2(n-1)$

$n - 1 = 50 + 3x$

$n = 50 + 3x + 1$

$n = 51 + 3x$

Чистовик 1

Задача №1

1) Предположим, что $p>2$ и $q>2 \Rightarrow p, q$ – нечетные и $(p-1)>1$.

Тогда

$$\underbrace{p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}}_{\text{неч.} - \text{неч.} + \text{неч.} = \text{чет.}}$$

неверно $\Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=2, \\ q=2; \end{array}\right.$

2) если $p=2$ и $q=2$, тогда:

$$2^2-2^2+3=2^1$$

$3=2$ – неверно

~~3) если $q=2$, а $p\neq 2$:~~

~~$p^2-2^p+3=2^{p-1}$~~

~~раз $p\neq 2$, то $p\geq 3 \Rightarrow 2^{p-1} \vdots 4$, тогда:~~

~~рассмотрим p^2-2^p+3 по $(\mathrm{mod}\ 4)$:~~

~~$p^2-2^p+3 \equiv_4 p^2-0+3 \equiv_4 2^{p-1} \equiv_4 0$~~

~~p^2~~

3) если $q=2$, а $p\neq 2$:

$$p^2-2^p+3=2^{p-1}$$

$$p^2=3\cdot 2^{p-1}-3$$

$$p^2=3(2^{p-1}-1)$$

$p^2 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$ Проверка: $\begin{cases} q=2; \\ p=3; \end{cases}$

~~$2^3-3^2+3=2^2$~~

$3^2-2^3+3=2^2$ –

$1+3=4$ – верно

Чистовик 2

Задача №1 (продолжение)

4) если $p=2$, а $q \neq 2$:

$$2^q - q^2 + 3 = 2^{2-1}$$

$$2^q - q^2 = -1$$

$$2^q = q^2 - 1$$

Рассмотрим по $(\bmod 3)$:

$$2^q \underset{3}{\equiv} q^2 - 1$$

$$(-1)^q \underset{3}{\equiv} q^2 - 1$$

раз $q \geq 3$ и q-простое $\Rightarrow$ q-неч:

$$-1 \underset{3}{\equiv} q^2 - 1$$

$q^2 \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow q^2 \vdots 3 \Rightarrow q \vdots 3 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow$ Проверка: $\begin{cases} q=3, \\ p=2; \end{cases}$

$$2^3 - 3^2 + 3 = 2^{2-1}$$

$-1+3=2$ – верно

Ответ: $\begin{cases} q=3, \\ p=2; \end{cases}$ и $\begin{cases} q=2, \\ p=3; \end{cases}$

Задача №2

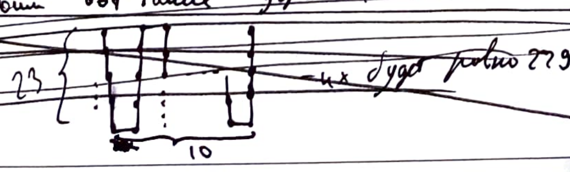
Рассмотрим улицы и перекрестки как граф в котором перекрестки – вершины (их будет $n = 10 \cdot 23 = 230$)

участки ~~улицы~~ дороги – ребра

Тогда убрать участок дороги – убрать ребро.

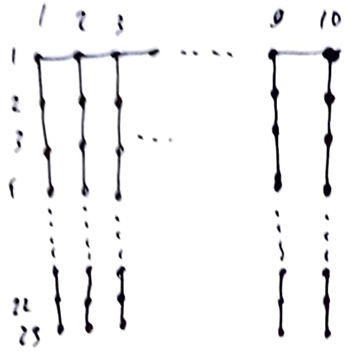
Но как сказано в условии после убирания ребер должен остаться связный граф на 230 вершин $\Rightarrow$ должно остаться хотя бы 229 ребер.

~~Пример: Оставим вот такие дороги: (остальные на ремонт)~~



Чистовик №3
Задача №2 (продолжение)

Пример:



— Оставим данные дороги, а остальные уберем на ремонт
Тогда всего на ремонт мы убрали: $9 \cdot 22 = 198$

Ответ: 198.

Задача №3

Пусть пакеты это граф в котором если один пакет лежит в другом, то они соединены ребром (если пакет A лежит в пакете B, который лежит в пакете C, то

)

Тогда получится граф дерево ведь у всех пакетов есть лишь один путь до „Главного" пакета (того в котором по сути лежат все пакеты).

Пусть n — всего пакетов, а x — не пустых, тогда:

$$n = x + 101.$$

Теперь посчитаем кол-во ребер в графе: с одной стороны это $n-1$, а с другой, это:

$$\underbrace{\Big(\underbrace{5}_{\text{степень у „Главного" пакета}} + \underbrace{6(x-1)}_{\text{степени у не пустых пакетов}} + \underbrace{101}_{\text{степени пустых пакетов}}\Big)}_{\text{Сумма степеней вершин.}}/2$$

Значит: $2(n-1) = 5 + 6(x-1) + 101$

Чистовик №4

Задача №3 (продолжение)

$2(n-1)=5+6x-6+101$

$2(n-1)=6x+100$

$n-1=3x+50$

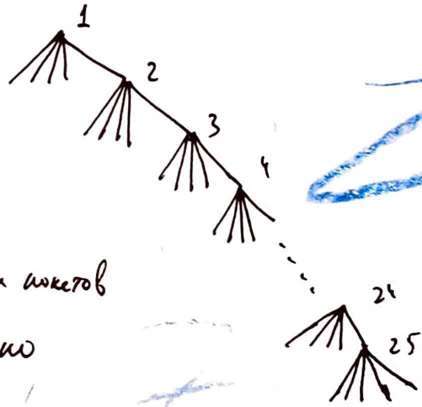
$n=3x+51$

$x+101=3x+51$

$50=2x$

$x=25$

Пример:



Тут будет:

$24\cdot4+5$ — пустых пакетов

$96+5=101$ — верно

Задача №4

$b_4\cdot b_2^3=b_1\cdot b_3^3$

$b_4\cdot 1^3=2\cdot 2^3$

$b_4=2^4$

Теперь докажем следующий факт по индукции:

Утверждение: $b_n=2^{((n-2)^2)}$

База: для $n=1,2,3$ это следует из условия

$b_1=2^{(1-2)^2}=2$

$b_2=2^{(2-2)^2}=1$

$b_3=2^{(3-2)^2}=2$

$b_4=2^{(4-2)^2}=2^4$

Чистовик №5

Задача №4 (продолжение)

Индукционный шаг: пусть это верно для всех $n \le k+2$, докажем для $n = k+3$:

надо д-ть: $b_{k+3} = 2^{(k+1)^2}$

Мы знаем, что:

$$b_{k+3} \cdot b^3_{(k+3)-2} = b_{(k+3)-3} \cdot b^3_{(k+3)-1}$$

$$b_{k+3} \cdot b^3_{k+1} = b_k \cdot b^3_{k+2}$$

$$b_{k+3} = \left(b_k \cdot b^3_{k+2}\right) / \left(b^3_{k+1}\right)$$

$$b_{k+3} = \left(2^{(k-2)^2} \cdot 2^{3k^2}\right) / \left(2^{(k-1)^2 \cdot 3}\right)$$

$$b_{k+3} = 2^{(k-2)^2 + 3k^2 - 3(k-1)^2}$$

$$b_{k+3} = 2^{k^2 - 4k + 4 + 3k^2 - 3k^2 + 6k - 3}$$

$$b_{k+3} = 2^{k^2+2k+1} = 2^{(k+1)^2}$$

ЧТД.

Значит $b_{2023} = 2^{(2021^2)}$

Задача №5

Ответ: Алиса выиграет.

Рассмотрим кол-во каждой буквы:

П – 1
О – 5
К – 1
Р – 3
И – 1
В – 2
Б – 1
Ь – 1
Е – 1
Н – 2
Г – 1

теперь разобьем их на группы:

П – 1 и К – 1; – №1
И – 1 и Б – 1; – №2
Е – 1 и Г – 1; – №3
В – 2 и Н – 2; – №4
О – 5, Р – 3 и Ь – 1. – №5

Чистовик №6

Задача №5 (продолжение)

Первым ходом Алиса зачеркивает 3 буквы О.
Теперь если ход сделан в какой-то из групп от 1 до 4 то Алиса может его повторить только с другой буквой ~~из же~~ той же группы.
Тогда рассмотрим ходы в группе №5.
~~(из Нам не важен порядок ходов (по сути в каком порядке стирались буквы — т.е. нам неважно что все группы кроме №5 мы можем считать полностью стертыми, а группа 5 нетронута)~~

Заметим что если после хода Алисы группа станет „симметричной" (т.е. будут лишь две буквы в одинаковом количестве), то Алиса сможет просто ходить „симметрично" Боре (т.е. ходить в ту же группу, что и Боря только со второй буквой), ведь все группы станут „симметричными" т.е. пока у Бори будет ход у Алисы он тоже найдется и раз игра конечна => Алиса победит!
Теперь рассмотрим все ходы Бори в группу №5:

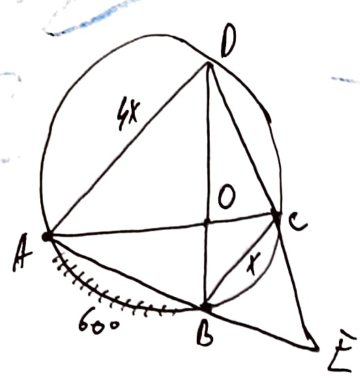
$\begin{cases} О-2 \\ Р-3 \\ Б-1 \end{cases}$:

	Тогда Алиса сходит так:
$\begin{cases} Р-3 \\ Б-1 \end{cases}$	$\begin{cases} Р-1 \\ Б1 \end{cases}$
$\begin{cases} О-1 \\ Р-3 \\ Б-1 \end{cases}$	$\begin{cases} О-1 \\ Б-1 \end{cases}$
$\begin{cases} О-2 \\ Р-2 \\ Б-1 \end{cases}$	$\begin{cases} О-2 \\ Р-2 \end{cases}$
$\begin{cases} О-2 \\ Р-1 \\ Б-1 \end{cases}$	$\begin{cases} Р-1 \\ Б-1 \end{cases}$
$\begin{cases} О-2 \\ Р-3 \end{cases}$	$\begin{cases} О-2 \\ Р-2 \end{cases}$
$\begin{cases} О-2 \\ Б-1 \end{cases}$	$\begin{cases} О-1 \\ Б-1 \end{cases}$

=> Алиса выиграет ч.т.д.

Чистовик №7

Задача №6



Дано: $\overset{\frown}{AB}=60°$

$AC=30$

$BC=x$

$AD=4x$

$AD \parallel BC$

Решение: 1) пусть пересечение DB и AC – точка O, тогда

$\triangle ADO \sim \triangle CBO$ (т.к. $\angle ADO = \angle OBC$ и $\angle DOA = \angle COB$)

$\Downarrow$

$$\frac{4x}{x} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = 4$$

2) Теперь заметим, что $ABCD$ – трапеция и т.к. она вписана в окружность, то это равнобокая трапеция $\Rightarrow AB = DC$ и $AC = DB = 30$

3) $\frac{AO}{OC} = 4 \quad | +1$

$\frac{AO+OC}{OC} = 5$

$30 = 5 \cdot OC$

$OC = 6 \quad (AO = 24)$

Аналогично с $\frac{DO}{OB} = 4 \Rightarrow OB = 6 \quad (DO = 24)$

4) $\triangle EBC \sim \triangle EAD$ (т.к. $BC \parallel AD$), то значит:

$4 = \frac{AD}{BC} = \frac{EB}{AE} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow$ если BE ($=EC$ из того что $ABCD$ – равнобокая) $= y$, то $AB = DC = 3y$.

6) $\angle ADB = \angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 30° \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = 30° \Rightarrow \angle AOB = \angle OCB + \angle OBC = 60°$

Чистовик № 8

Задание 16 (продолжение)

7) по теореме косинусов для ΔAOB:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos(\angle AOB)$

$9y^2 = 24^2 + 6^2 - 2 \cdot 24 \cdot 6 \cdot \cos(60°)$

$9y^2 = 9 \cdot 8^2 + 9 \cdot 2^2 - 9 \cdot 8 \cdot 2$

$y^2 = 64 + 4 - 16 = 52$

$y = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \Rightarrow AB = 6\sqrt{13}$

8) по теореме косинусов для ΔAOD:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos(\angle AOD)$

$AD^2 = 2AO^2 - 2AO^2 \cdot \cos(120°)$

$AD^2 = 2AO^2 + AO^2$

$AD^2 = 3AO^2$

$4^2 \cdot x^2 = 3 \cdot 4^2 \cdot 6^2$

$x^2 = 3 \cdot 6^2$

$x = 6\sqrt{3} \Rightarrow AD = 24\sqrt{3}$

9) по теореме синусов для ΔADB:

$\frac{AB}{\sin(\angle ADB)} = \frac{DB}{\sin(\angle DAB)} \Rightarrow \sin(\angle DAB) = \frac{DB}{AB} \cdot \sin(\angle ADB)$

$\sin(\angle DAB) = \frac{30}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2}$

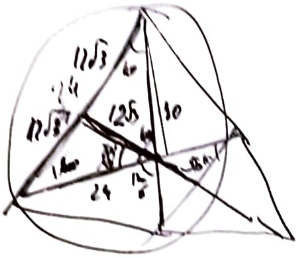
$\sin(\angle DAB) = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

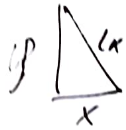
10) тогда $S_{\Delta DAE} = AD \cdot AE \cdot \sin(\angle DAB) \cdot \frac{1}{2} = 24\sqrt{3} \cdot 4y \cdot \frac{5\sqrt{13}}{26 \cdot 2} =$

$= 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{13} = 24\sqrt{3} \cdot 10 = 240\sqrt{3}$

Ответ: $240\sqrt{3}$

Черновик





$y^2 + x^2 = 4x^2$

$y = \sqrt{3}x$

$24\sqrt{3} \cdot \frac{15}{8} \cdot 4$

$24^2 + 6^2 - 2 \cdot 24 \cdot 6 \cdot \cos(120)$

$24^2 + 6^2 + 24 \cdot 6$

$9(64 + 16) = 9 \cdot (84)$

$+4$

$9 \cdot 4 \cdot 21$