0 755263 970002

75-52-63-97
(141.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Давлетова Александра Ярославовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
75-52-63-97	98	21	0	21	21	21	14	X	X

75-52-63-97
(141.2)

98 (девяносто восемь)

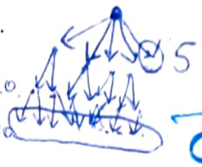
Чистовик 1

1	2	3	4	5	6

№1

Рассмотрим, что меняется при заполнении пакета другими 5 пакетами. У нас был 1 пакет пустой, а стало 1 пакет полный и 5 пустых. Значит, пустых пакетов стало на 4 больше. Изначально есть 1 пакет пустой, мы каким-то образом заполняем его и стало 101 пустой пакет, при этом за одно действие пустых пакетов становится на 4 больше. Значит, полных пакетов. [101:4] = 25 пакетов полных. Всего 126 пакетов. Пример: вершины — это пакеты, ребро из 1 в 2 $1 \longrightarrow 2$. Значит, 2 находится в 1.

В круг обведены пустые пакеты



№3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$. Заметим, что p и q больше 1, $2^{p-1} \vdots 2$. $p^q - q^p = 2^{p-1} - 3$. Значит, $p^q - q^p \not\vdots 2$, тогда p и q разных чётностей, одно из них равно 2, так как только 2 чётное простое число. Пусть $p=2$.

$2^q - q^2 = 2^1 - 3 \Leftrightarrow 2^q = q^2 - 1$, $2^q = (q-1)(q+1)$, так как 2^q кратно только степеням числа 2, то $q-1$ и $q+1$ степени двойки, для $q>1$. $q=3$. Итого $p=2$ $q=3$.

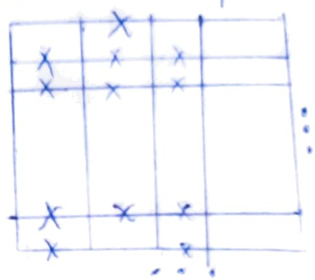
Пусть, $q=2$. $\cancel{p^2 - q}$ $p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$ $p^2 = 2^p + 2^{p-1} - 3$

$p^2 = 2^{p-1} \cdot 3 - 3$. $p^2 = 3(2^{p-1} - 1)$. Значит, $p^2 \vdots 3$, а тогда $p \vdots 3$ и $p=3$. Итого уравнение имеет два решения $p=2$ $q=3$; $p=3$ $q=2$.

Чистовик 2

№4

Пусть, перекрёстки это ~~реб~~ вершины, а дороги рёбра. Всего вершин $23\cdot 10=230$. Рёбер $22\cdot 10+9\cdot 23=427$. После удаления рёбер (отправки на ремонт дорог) граф остался связным. Значит, в нём хотя бы рёбер это кол-во вершин вычесть 1, это 229. Тогда, на ремонт отправили не более 198 дорог. Пример:



Зачёркнутые дороги отправлены на ремонт. ~~Все столбцы неизменны, а во всех строках убрано 22 ребра, столбцов 10, значит убрано~~

Все строки неизменны, а во всех 9 столбцах убрано 22 дороги, итого $22\cdot 9=198$.

№5

Докажем, что если $b_i=2^k$ $b_{i+1}=2^{k+t}$ $b_{i+2}=2^{k+2t+2}$, то $b_{i+3}=2^{k+3t+6}$. Подставим значение $b_i;\ b_{i+1};\ b_{i+2}$;

$$b_{i+3}\cdot 2^{3k+3t}=2^k\cdot 2^{3k+6t+6}.\quad b_{i+3}=2^{k+3t+6}\ \blacksquare$$

Посмотрим, что мы доказали этой Леммой. Что если есть 3 подряд идущих элемента последовательности такие, что следующий элемент получается при умножении на 2^t, далее умножение будет 2^{t+2}, потом на 2^{t+4} предыдущий. $b_1=2^1$ $b_2=2^0$ $b_3=2^1$ $b_4=2^1\cdot 2^{-3}\cdot 2^6=2^4$, по Лемме для $k=1$ $t=-1$. Можем заметить, что $x+1$-ый элемент получается из x-ого домножением на 2^y, где y - это $x-1$-ое нечётное число начиная с 1 (Нулевое нечётное -1). Тогда, $b_L = 1+3+5+\ldots+(2L-5)=(L-2)^2$, Для $L\geq 4$.

Тогда $b_{2023}=2021\cdot 2021=4084441$.

75-52-63-97 (141.2)

Чистовик 3

№6

Рассмотрим, какие есть буквы и их количество

П, к, бь, ё, г, и по 1 шт. О - 5 шт, р - 3 шт,
в - 2 шт, н - 2 шт. Будем играть за Алису
Зачеркнем все О. ~~Зат~~ Если Боря делает ход
с буквой в или н, то будем повторять ход
Бори с н, если Боря зачёркивал в или наоборот.
Мы сможем это сделать, так как ~~после хода~~ во
время хода Бори ~~в~~ ~~н~~ их одинаковое число букв.
Тогда, на исход могут повлиять только п, к, бь,
ё, г, и, р - 3 шт. Пусть Боря сделал действие
с буквой которых 1 штука. Тогда, зачеркнем все
Р. Осталось 6 букв по 1 штуке, ход Бори. Мы
победили. Пусть Боря зачеркнул все Р. Осталось
7 букв по 1 штуке в наш ход. Мы победили.
Пусть Боря зачеркнул одну Р. Зачеркнём
тоже 1 р. Осталось 8 букв по 1 штуке, ход
Бори. Мы победили. Значит, Алиса победит.
Из-за „Симметрий" букв В и Н (Одинакового
их количества) они на очерёдность не влияют,
а тогда ход Алисы всё равно последний.

75-52-63-97
(141.2)

Черновик 1

 5 15 125

5 25  5 5 20 100

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n_1(n_1+1)}+\frac{1}{n_2(n_2+1)}\pm\frac{1}{n_3(n_3+1)}=n_3(n_3+1)(n_2(n_2+1)$

26.

$10+25=35$

$n_1^2+n_1+n_2^2+n_2$

$601 \mid 13$

$601 \mid 14$

$601 \mid 23$ 26

$p^q-q^p+3=2^{p-1}$

$2^q-q^2=2^1-3$ $\quad 2^q-q^2=-1$ $\quad q=3$

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$ $\quad 3^2-2^3+3=4$

230 $\quad p^2-2^p=2^{p-1}-3$

229 $\quad p^2=2^p+2^{p-1}-3$ $\quad 2^q=(q-1)(q+1)$

5 $\quad p^2=2^{p-1}(2+1)-3$ $\quad 9\cdot 23=$

$1+3$ 9 $\quad p^2=(2^{p-1}-1)\cdot 3.$

$b_4\cdot 1=2\cdot 2^3$ $\quad 27-9=198$ $\quad 9\cdot 23+22\cdot 10=220+207=427.$ $\quad 427-229=198$

$b_4=2^4$

$b_5=1\cdot 2^{12}$ $\quad 7\ 4\ 14$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}=\frac{29}{56}+\frac{15}{460}$ $\quad b_5=2^9$ $\quad b_6\cdot 2=2\cdot 2^{27}$ $\quad b_6=2^{16}$ 846 $\quad 2^{k+n}$ $\quad 2^{k+2n+2}$ $\quad 2^{k+3n+6}$

$x\cdot 2^{27}=2^{25}\cdot 2^{4}$ $\quad 240 \quad x\cdot 2^k$

56 $\quad \frac{7}{12} \quad \frac{37}{60}$ $\quad 2^{25}$ 2800

$8\cdot 7$ 60 $\quad 2^k \quad 2^{k+n} \quad 2^{k+2n+2} \quad x\cdot 2^{3k+3n}=2^k\cdot 2^{3k+6n+6}=$

$4\cdot 3\cdot 5$ $\quad x \quad x=2^{k+3n+6}$

$\frac{1}{399}-\frac{1}{400}$ $\quad 2021\cdot 2021$ $\quad 2021 \quad 4042 \quad 40420 \quad 4084441$

Покори Воробьёвы горы

П к б е т и б ы Г

0 1 2 0

О – 5 шт

Р – 3 шт

В – 2 шт.

~~Г – 2 шт.~~ Ы – 2 шт

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!