65-50-87-99
(123.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Карповой Марии Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
65-50-87-99 123.5	90	20	20	20	20	0	10		

 90(девяносто)

65-50-87-99 (123.5)

ЧИСТОВИК

① $1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-1$

$\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x(\cos x-2\sin x)+\cos x(2\cos x+\sin x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$2\sin x\cos x-2\sin^2 x+2\cos^2 x=\frac{1}{2}-\sin^2 x-\sin x\cos x$

$3\sin x\cos x-\sin^2 x+2(1-\sin^2 x)-\frac{1}{2}=0$

$3\sin x\cos x-3\sin^2 x+\frac{3}{2}=0$

$\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}=0$

$2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x=0$

$\sin 2x+\cos 2x=0$

$\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$2x+\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$2x=\pi n-\frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8}, n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8}, n\in\mathbb{Z}$.

③ Если числа x_1, x_2, x_3 являются корнями многочлена 3 степени со старшим коэффициентом 1, то этот многочлен можно переписать в виде: (по т. Безу он делится на $(x-x_n)$)

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-$
$-x_1x_2x_3=0$

тогда (по т. Виета):

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \end{cases}$$

Если x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 являются корнями $x^3+ax^2+bx+c=0$, то (по т. Виета)

$a=-(x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1)=-(2x_1+2x_2+2x_3)=-2(x_1+x_2+x_3)$

подставим значение $x_1+x_2+x_3$ из первой системы и получим $a=-2\cdot 6=-12$

$C=-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

$-C=x_1^2x_2+x_1^2x_3+2x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

если перемножить 2 и 3 уравнения из системы, то получится

$x_1^2x_2+3x_1x_2x_3+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1x_3^2=6\cdot 7=-C+x_1x_2x_3$

ЧИСТОВИК

③ (продолжение)

$c = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 42 = 1 - 42 = -41$

$b = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3) + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3) + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_3 +$

$+ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 =$

$= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 21$

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) = 6^2 - 2\cdot 7 = 36 - 14 = 22$

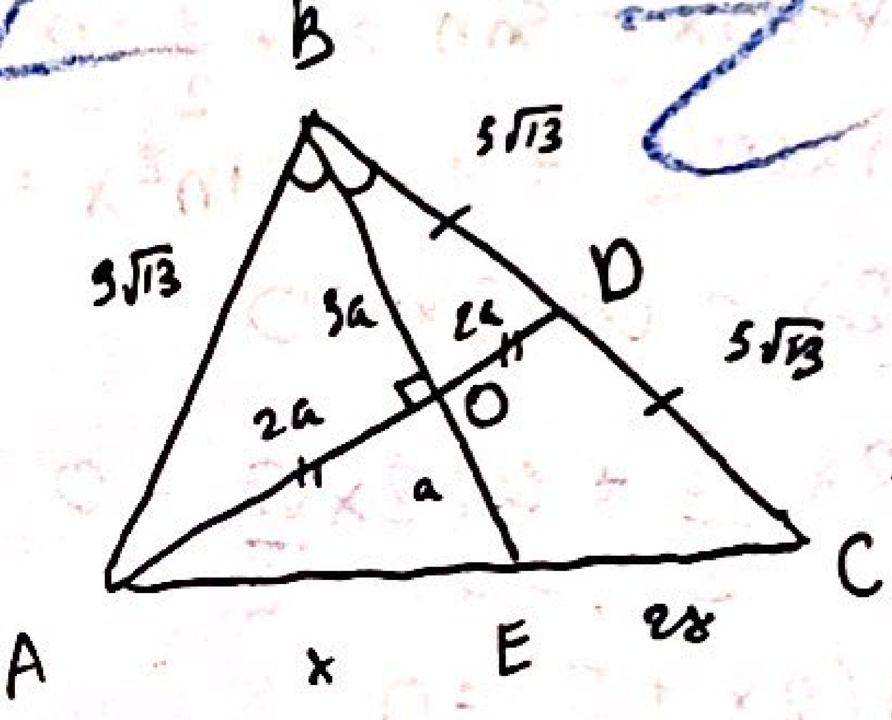
$b = 22 + 21 = 43$

Ответ: $a = -12$, $b = 43$, $c = -41$.

④ Дано:
ΔABC
BE – бисс.
AD – медиана
$AD = BE$
$AD \perp BE$
$AB = 5\sqrt{13}$

S_{ABC} – ?

Решение:
пусть O – точка пересеч. AD и BE
$\angle AOB = \angle BOD = 90°$
в ΔABO и ΔDBO OB – общ. сторона
$\angle ABO = \angle DBO \Rightarrow \Delta ABO = \Delta DBO$ по катету и острому углу



$\Rightarrow BD = AB = 5\sqrt{13}$

$CD = BD = 5\sqrt{13}$, $BC = 10\sqrt{13}$

по т. о бисс., $\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Leftrightarrow 10\sqrt{13}\cdot AE = 5\sqrt{13}\, CE$

$2AE = CE$

пусть $AE = x$, тогда $CE = 2x$

по т. Менелая в ΔCBE: $\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{AE}{AC} = 1$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{1}{3} = 1$, $\frac{BO}{OE} = 3$

пусть $OE = a$, тогда $BO = 3a$, $BE = AD = 4a$, $AO = OD = 2a$

по т. Пифагора в ΔAOB: $AO^2 + OB^2 = AB^2$

$4a^2 + 9a^2 = 25\cdot 13$

$13a^2 = 25\cdot 13$

$a^2 = 25$

$a = 5$

$2a = 10$, $3a = 15$

$\sin\angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \cos\angle ABO = \frac{BO}{AB} = \frac{15}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\angle ABC = \sin 2\angle ABO = 2\cdot\sin\angle ABO\cdot\cos\angle ABO = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{13}\cdot 10\sqrt{13}\cdot\frac{12}{13} = 300$

Ответ: 300.

65-50-87-99
(123.5)

ЧЕРНОВИК

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \end{cases}$$

	1	-6	7	-1
1	1	-5	2	1
-1	1	-7	0	-1

$x_1 = \frac{1}{x_2x_3} = 6-(x_2+x_3)$

$x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=7$

$x_1(6-x_1)+\frac{1}{x_1}=7$

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1 = 2(x_1+x_2+x_3)=12$

$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) \overset{=42-3}{=} x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+$

$+x_2^2x_1+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2 = 2+x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+\cancel{x_2^2x_3+}$

$\cancel{+x_2^2x_1}+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_3^2x_2+x_1x_3^2+x_1x_2x_3+x_3x_1^2$

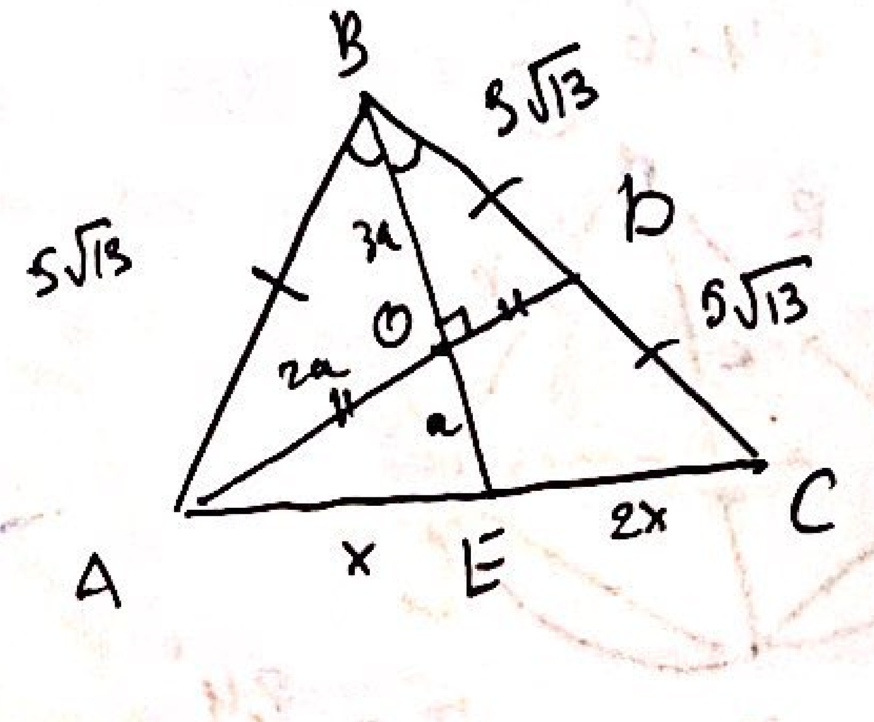
$+ \; (x_1+x_2)(x_2+x_3) = \underline{x_1x_2}+x_2x_3+x_1x_3+x_2^2$

$(x_1+x_2)(x_1+x_3) = x_1^2+\underline{x_2x_1}+x_3x_1+x_2x_3$

$(x_2+x_3)(x_1+x_3) = \underline{x_1x_2}+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2$

$\underbrace{3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}_{=21}+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$\underbrace{(x_1+x_2+x_3)^2}_{36} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+\underbrace{2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}_{14}$



$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{AE}{AC}=1$

$1\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\frac{BO}{OE}=\frac{3}{1}$

$4a^2+9a^2=25\cdot13$

$13a^2=25\cdot13$

$a^2=25$

ЧЕРНОВИК

14:00 | A
15:00 | B

1) авт. выехал на час раньше, сделал остановку
=> авт. ехал на час меньше

2) авт. выехал на час позже, сделал остановку
=> авт. ехал на 3 часа меньше

3) вел. выехал на час раньше, сделал остановку
вел ехал . . . .

4) . . . .

$\frac{S}{x} = \frac{S}{2x}$

1878 | 2
939 | 3
313 |

1877 | 7
-14 | 26
47
-42
57

1870 | 7
-14 | 26
47
-42
50

$2xt = x(t+1)$

$2xt = xt + x$

$xt = x \quad t = 1$

$2xt = x(t+3)$

$2xt = xt + 3x$

$xt = 3x \quad t = 3$

$S = p$

19

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

313 | 13
-26 | 7
53

937
× 28
6

2x
2x

60км
60км

14:00 -> через 2 часа

14:00 : => через 6 часов

13:00 : =>

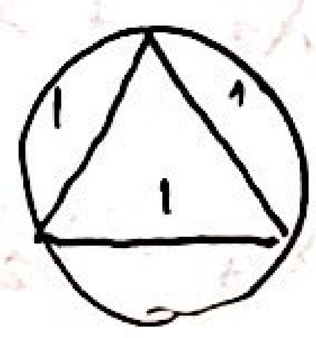
60км

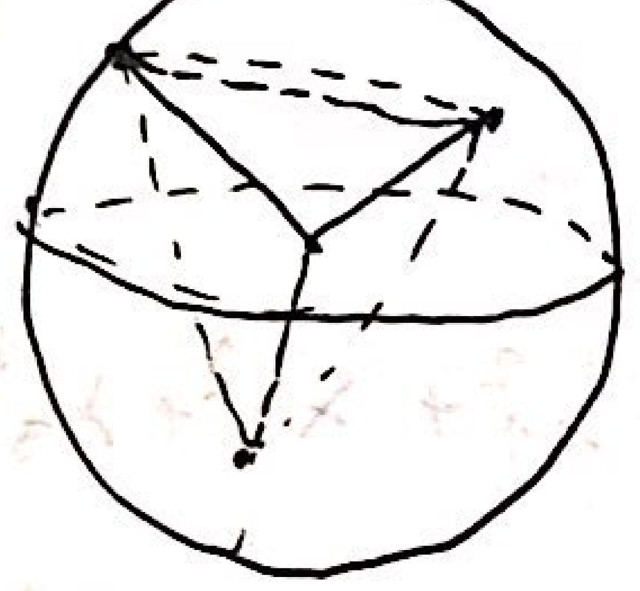
1876 ⋮ k - 3

1879 ⋮ k

$S = \frac{ABC}{4R}$ 60 км

$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$





313 | 11
-22 | 2
93

1 2 3 4 6 8 12 24
1 2 3 4 5 6 7 8

4·6 4·8
3·8 3·12

$24 = 2^3 \cdot 3$

$(3+1)(1+1) = 4 \cdot 2$

1 2 3 4 6 9 12 18 36
1 2 3 4 5 6 7 8 9

~~6·12~~ 4·18 · 3·36

~~4·12~~

2x, x, $\sqrt{3}x$

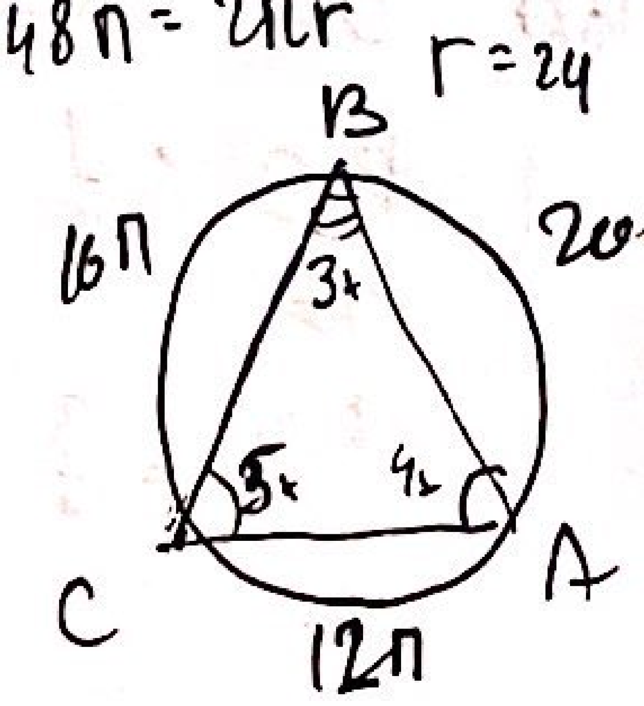
2x, $\sqrt{2}x$, $\sqrt{2}x$

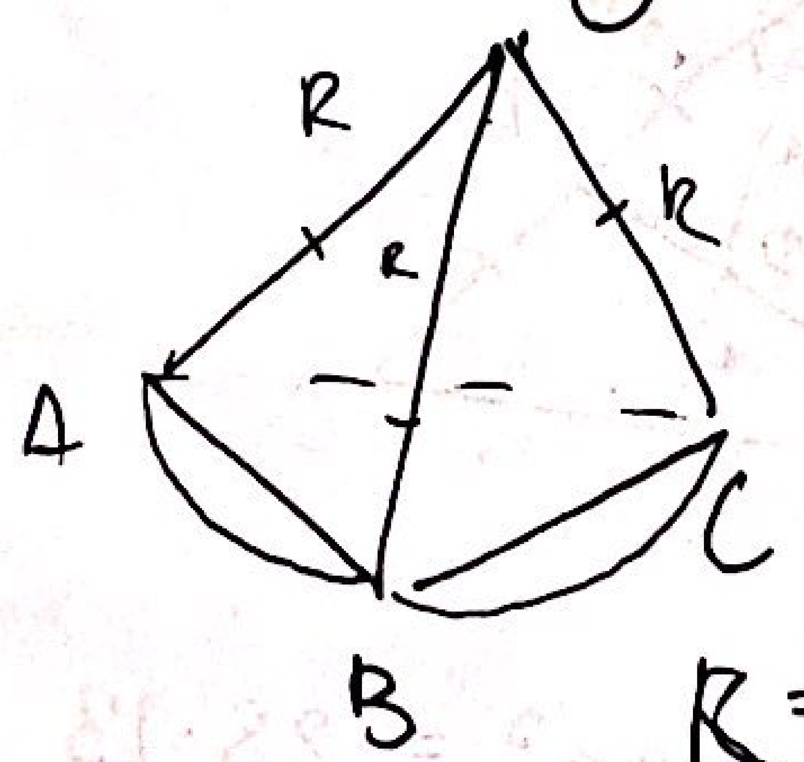
3·9
4·6

1 2 ~~3~~ 4 8 16

$48\pi = 2\pi r$ $r = 24$

5·4П
3·4П
4·4П





$R = 24$

$3x \cdot \frac{4}{3}$

$12x = \cancel{360}$ 180

$x = \cancel{30}$ 15

4·9 · 3·12

60, 45, 75

$24 = \frac{BC}{2\sin 60}$

$48 = BC$

65-50-87-99
(123,5)

ЧИСТОВИК

② Рассмотрим 4 случая:

1) ~~...~~ автомобилист выехал на час раньше, сделал остановку
=> автомобилист ~~находился в пути~~ ехал на час меньше велосипедиста

2) автомобилист выехал на час позже, сделал остановку
=> автомобилист ехал на 3 часа меньше велосипедиста

3) велосипедист выехал на час раньше, сделал остановку
=> велосипедист ехал на час меньше автомобилиста

4) велосипедист выехал на час позже, сделал остановку
=> велосипедист ехал на 3 часа меньше автомобилиста

Заметим, что рассматривать случаи 3) и 4) нет смысла, так как если скорость и время в пути велосипедиста меньше, то пройденное расстояние будет меньше, а по условию, пройденное расстояние равно.

пусть x – скорость вел., тогда $2x$ – скорость авт., t часов ехал авт.

1) велосипедист ехал $t+1$ часов

$2xt = x(t+1)$

$2xt = xt + x$

$xt = x$, $x>0$

$t = 1$

тогда велосипедист на весь путь затратил 2 часа, а автомобилист (вместе с остановкой) – 3 часа, при этом он выехал на час раньше – в 14:00, значит, приехали в 17:00

2) велосипедист ехал $t+3$ часов

$2xt = x(t+3)$

$2xt = xt + 3x$

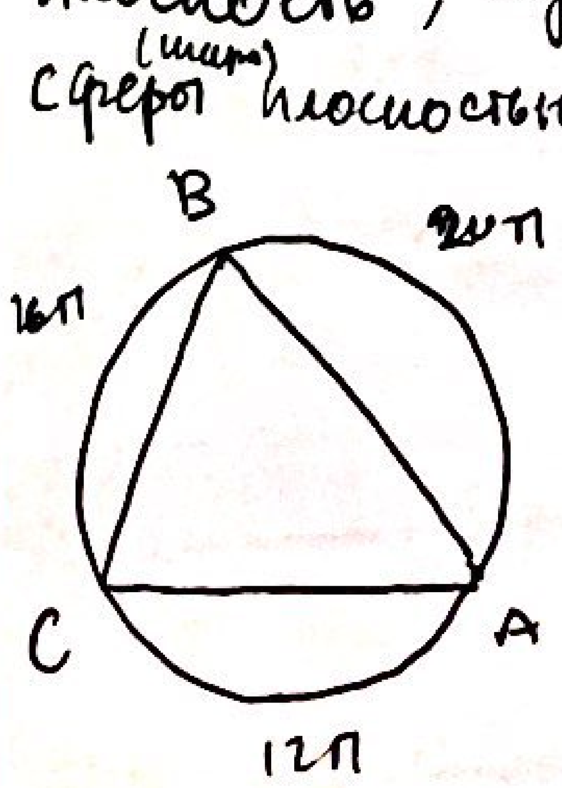
$xt = 3x$

$t = 3$

велосипедист ехал 6 часов (выехал в 14:00), автомобилист ехал 5 часов вместе с остановкой (выехал в 15:00) => приехали в 20:00

Ответ: 17:00 или 20:00.

⑤ ~~Сечение~~ ~~...~~ ~~проходит~~ ~~...~~ Через 3 точки можно провести плоскость, пусть через A, B и C проходит плоскость α. Тогда сечение сферы (шара) плоскостью α – круг, ABC – вписанный в окружность сечения треугольник.



~~20π~~ пусть длины дуг BC, AB, AC наименьшие из возможных: $BC = 16\pi$, $AB = 20\pi$, $AC = 12\pi$

чистовик

(6) число N можно представить как произведение его двух делителей:

$1 \cdot N = p_1 \cdot p_k,\ p_2 \cdot p_{k-1},\ p_3 \cdot p_{k-2},\ p_4 \cdot p_{k-3}$ и т.д.

т.к. $p_3 \cdot p_{1877} \cdot p_4 \cdot p_{1876} \leq N^2$

$p_3 \cdot p_{1877} \geq p_3 \cdot p_{k-2}$

$p_4 \cdot p_{1876} \geq p_4 \cdot p_{k-3}$

в противном случае $p_3 \cdot p_{1877} < N,\ p_4 \cdot p_{1876} < N$

$1877 \geq k-2$

$1876 \geq k-3$

$k \leq 1879$

при этом k не может быть меньше, чем 1877 (т.к. существует p_{1877})

Значит, $k \in \{1877; 1878; 1879\}$

Если число разложить на простые множители $N = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{n_n}$ то количество его натуральных делителей находится по формуле

$k = \sigma(N) = (n_1+1)(n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_n+1)$

при $k = \sigma(N) = 1878$:

$1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$

Значит, степени при разложении N на простые множители были 1, 2, 312: $N = q_1^1 \cdot q_2^2 \cdot q_3^{312}$

Тогда $N^3 = q_1^3 \cdot q_2^6 \cdot q_3^{936}$

$\sigma(N^3) = (3+1)(6+1)(936+1) = 937 \cdot 28$

такие N могло быть представлено в виде $N = n_1^5 \cdot n_2^{312}$

$N^3 = n_1^{15} \cdot n_2^{936}$

$\sigma(N^3) = (15+1)(936+1) = 16 \cdot 937$

$N = n_1^{625} n_2^2$

$N^3 = n_1^{1875} n_2^6 \quad \sigma(N^3) = (1875+1)(6+1) = 1876 \cdot 7$

$N = n_1^{1877} \quad N^3 = n_1^{1877 \cdot 3} \quad \sigma(N^3) = 1877 \cdot 3 + 1$

$N = n_1^{938} n_2^1 \quad N^3 = n_2^3 n_1^{938 \cdot 3} \quad \sigma(N^3) = 4 \cdot (938 \cdot 3 + 1)$

при $\sigma(N) = 1877$:

$N = q_1^{1876} \quad N^3 = q_1^{1876 \cdot 3} \quad \sigma(N^3) = 1876 \cdot 3 + 1$

при $\sigma(N) = 1879$:

$N = q_1^{1878} \quad N^3 = q_1^{1878 \cdot 3} \quad \sigma(N^3) = 1878 \cdot 3 + 1$