вход 12^{48} – 12^{53}

0 221557 950000

22-15-57-95
(117.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В..ЛОМОНОСОВА

Вариант ___________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гасаненко Арсения Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
22-15-57-95	105	21	—	21	21	21	21	X	X

оценка 99

22-15-57-95
(117.3)

Черновик

99 (девяносто девять)

$p=2,\ q=3$

$2^q - q^2 + 3 = 2^1$

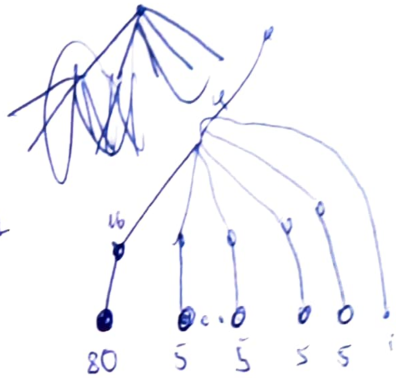
$q^2 = 2^q + 1$

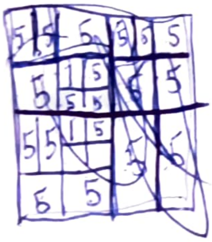
$q^2 - 1 = 2^q$

$\cancel{5x + x - 6x}$

$5x + 17 + x = 17 + 4x = 101$

$(q-1)(q+1) = 2^q$





$2^n - 2^m = 2$

$2^{n-1} - 2^{m-1} = 1$

$n = 2$

$m = 1$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 + 3 = 2^{p-1} + 2^p$

1 2 3 4

2 4 2^1 2^4 2^9 2^{16} $2^{(n-2)^2}$

$\frac{2^1 \cdot 2^{27}}{2^{12}} = 2^4$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

$b_n = \frac{2^{(n-5)^2} \cdot 2^{(n-3)^2}}{2^{(n-4)^2}} =$

$\cancel{n^2 - 10n + 25 + n^2 - 6n + 9 - n^2 + 8n - 16} =$

$= 2^{(n-5)^2 + (n-3)^2 - (n-4)^2} =$

$= n^2 \cancel{- 8n + 18}$

$n^2 - 4n + 4$

Чистовик

№3

Т.к. p - простое, то $p \geq 2 \Rightarrow p-1 \geq 1 \Rightarrow 2^{p-1}$ - чётное. ~~Тогда~~

Если p и q - нечётны, то p^q, q^p - нечётны, $p^q - q^p$ - чётно, $p^q - q^p + 3$ - нечётно, но оно чётно. ~~Противоре~~ Противоречие. Значит p или q - четно, а т.к. они простые, то p или q равно 2.

1. $p=2$. Тогда $2^q - q^2 + 3 = 2^1 = 2 \Rightarrow 2^q = q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$.
Т.к. ~~$q-1$ и $q+1$~~ $(q-1)(q+1)$ - степень двойки и $q-1$, $q+1$ - натуральны, то $q-1$ и $q+1$ - степени двойки (возможно и нулевые). $q+1 = 2^n$, $q-1 = 2^m$, $2^n - 2^m = 2 = 2^m(2^{n-m} - 1)$.
Т.к. $n > m$ (иначе разность была ≤ 0), то $2^{n-m} - 1$ - нечет.
Значит 2^m - наибольшая степень двойки входящая в разложение $2^n - 2^m = 2$ на прост. множ. В 2 такая степень - $2^1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow q = 2^1 + 1 = 3$. Простое.
$p=2$, $q=3$.

2. $q=2$. Тогда $p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \Rightarrow p^2 = 2^{p-1} + 2^p - 3 =$
$= 2^{p-1}(1+2) - 3 = 3 \cdot 2^{p-1} - 3 \vdots 3$. $p^2 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3$, т.к. p - простое, то $p=3$.
$q=2$, $p=3$

Ответ: $(p,q) = (2,3), (3,2)$

22-15-57-95
(117.3)

Чистовик

№1

~~Буд Стакана~~

~~Докажем, но если у нас п~~

Рассмотрим 1 пустой пакет. Будем класть в него пакеты, пока не получим нашу ситуацию. Если в ситуации наш пакет пустой, то всё. Если нет, то кладём в него 5 пакетов и делаем этот алгоритм для каждого из 5 пакетов. Тогда изначально у нас был 1 пустой пакет. Каждым „ходом" мы прибавляем 5 пустых пакетов, но один перестаёт быть пустым. Кол-во пакетов увеличивается на 5, кол-во пустых на 4. Всего мы сделали $\frac{101-1}{4}=25$ ходов и всего пакетов стало $1+25\cdot 5=126$

Ответ: 126 пакетов

№5 чистовик

Докажем, что для $n \geq 2$, $b_n = 2^{(n-2)^2}$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3 \Rightarrow b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$.

База индукции: $b_2 = 2^{(2-2)^2} = 2^{0^2} = 2^0 = 1$, $b_3 = 2^{(3-2)^2} =$
$= 2^{1^2} = 2^1 = 2$. $b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_{n-2}^3} = \cancel{\frac{2^4 \cdot (2)^3}{(2^1)^3}} = \frac{2^1 \cdot 2^3}{2^0} = 2^4 = 2^{(4-2)^2} =$
$= 2^{2^2} = 2^4$

Шаг индукции: Предположим для $k-1, k-2, k-3$ это верно. Тогда $b_k = \frac{b_{k-3} \cdot b_{k-1}^3}{b_{k-2}^3} = \frac{2^{(k-5)^2} \left(2^{(k-3)^2}\right)^3}{\left(2^{(k-4)^2}\right)^3} =$

$= 2^{(k-5)^2 + 3(k-3)^2 - 3(k-4)^2}$ $\cancel{= k^2 - 10k + 25 + 3k^2 - 18k +}$ $=$

$= 2^{k^2 - 10k + 25 + 3k^2 - 18k + 27 - 3k^2 + 24k - 48} =$

$= 2^{k^2 - 4k + 4} = 2^{(k-2)^2}$. Значит для k это верно.

$b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{2021^2}$.

22-15-57-95 (117.3)

$P_{2n+1} = (2n+1)P_{2n} + (2n)!$ Черновик

$P_{2n} = 2nP_{2n-1} + (2n-1)!$

$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

$P_{2n+1} - P_{2n} = 2n(P_{2n} + (2n-1)!) =$

$= 2n(2nP_{2n-1}) = 4n^2P_{2n-1}$

$1 \quad 2\cdot1+1 \quad 3\cdot1+2!$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6} + \dots + \frac{1}{399\cdot400}$

1 1 5 14 94

$P_{2n+1} = 4n^2P_{2n-1} + P_{2n}$

$P_{2n+1} =$

$\cancel{P_n = P_{n-1} \cdot n + (n-1)!}$

$(2n)! \cdot 2n + (2n+1)! \cdot (2n+1) =$

$= (2n)!(2n + (2n+1)^2) =$

чётные

$= (2n)!(\cancel{4n^2 + 6n})$

$\cancel{\frac{P_{n-1}}{(n-1)!}} + \frac{1}{n}$

П |

О | | | | |

К |

Р | | |

И |

В | |

Б |

Ь |

Ё |

Ы | |

г |

$\frac{P_{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2n+1} =$ $P_{2n} \cdot (2n+1) + (2n)!$

101 ||||

11 |||

1 1

10

11

1

$\frac{5}{6} = \frac{1}{4}$

14

$\frac{20}{24}$

20

398!

$\cancel{398!(397\cdot398\cdot399\cdot400)}$

101 |||||

1 1

1 1

11 □ ||||

228

23

3·4·5

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+200} = \frac{2n+200}{n(n+200)}$

9·23+22·10 = 207+220 = 427

3·4·5·6

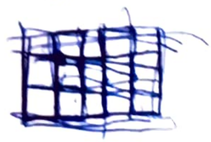
1 202

23

21 + 9·23 = 229

1 200

~~199~~ 400



198 201 400

229

Чистовик
№6

Разобьём буквы на пары и тройку.

сколько встречается буква

П1 – К1 И1 – Б1

В2 – Ы2 Ы1 – Е1

О5 – Р3 – Г1

Стратегия для Алисы:

Сначала зачеркнуть 3 буквы О. Если Боря ~~сходит буквой из пары,~~ зачеркнет букву(ы) из пары, то Алиса зачеркивает столько же по кол-во, но другую букву пары. Если он сходит бук. из тройки, то она должна сходить, как показано ниже в зависимости от тех букв, которые взял Боря

О2 – Р3 – Г1 $\xrightarrow{Б}$ О1 – Р3 – Г1 $\xrightarrow{А}$ О1 – ~~Р0~~ – Г1

О2 – Р3 – Г1 → ~~О0~~ – Р3 – Г1 → Р1 – Г1

О2 – Р3 – Г1 → О2 – Р2 – Г1 → О2 – Р2 – ~~Г0~~

О2 – Р3 – Г1 → О2 – Р1 – Г1 → ~~О0~~ – Р1 – Г1

О2 – Р3 – Г1 → О2 – ~~Р0~~ – Г1 → О1 – Г1

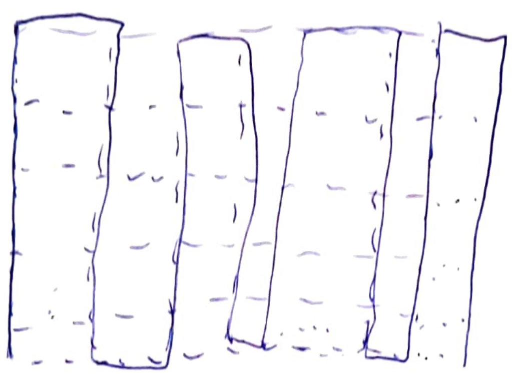
О2 – Р3 – Г1 → О2 – Р3 – ~~Г0~~ → О2 – Р2

Как видим всегда из тройки получается пара. После хода Алисы ~~во всех парах будет один. кол-во в к~~ кол-во парных букв будет равно, а после хода Бори нет. Когда ничего нет, это равновесие выполняется, значит Алиса выиграет.

Чистовик

№4

Рассмотрим граф, где вершины - перекрестки, а рёбра - неремонтируемые участки. Т.к. перекрестки образуют сетку 23×10, то их 230. Значит в графе 230 вершин. Т.к. из любой вершины, можно добраться в любую другую, то ~~гра~~ граф связен и в нём хотя бы 230-1=229 ребер. ~~Всего~~ ~~Горизонтальных~~ Участков улиц в линии - 9, линий 23, значит их 23·9 = 207. Аналогично ~~проспек~~ участков проспектов 22·10=220. Всего участков - 427. Макс. ремонт. - 427-229=198. Пример: Не рем. учаски распологаются змейкой.



Тогда легко убедится, что граф связен и выглядит, как линия. Значит в нём 229 рёбер.