0 956684 990000

95-66-84-99
(141.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8 класс

Место проведения Волгоград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ (Покори Воробьевы горы)
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Руховой Алины Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
95-66-84-99	91	21	0	21	21	7	21	X	X

95-66-84-99 (11.1)

Чистовик

91 (9 ... один)

1	2	3	4	5	6

Задание №3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

2^{p-1} — чётное, тогда и $(p^q - q^p + 3)$ — чётное.

тогда $(p^q - q^p)$ — нечётное.

А значит p и q — разной чётности

и среди них точно есть чётное

число. Единственное чётное простое

число — это 2.

Пусть $p=2$ тогда $2^q - q^2 + 3 = 2^{2-1}$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q = q^2 - 1$, q — нечётное и неравно 1.

Пусть $q=3$. тогда все получается

Почему больше q ничему не может равняться

Допустим $q = \cancel{4}5$, то $32 > 24$, что Чистовик
~~16 < 32~~ не является равенством,

а далее при всех q больших
5. левая часть выражение будет
увеличиваться в гораздо больше
раз, чем правая, т.к. в ней увеличивается
степень, а в правой число под степенью
т.е. при $n > 2$. 2^n всегда больше n^2.
Теперь представим, что $q = 2$.
Тогда $p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$$p^2 + 3 = 2^{p-1} + 2^p$$

$$p^2 + 3 = 2^{p-1}(1+2)$$

$$p^2 + 3 = 2^{p-1} \cdot 3$$

p - нечётно и больше 2.
Пусть $p = 3$, тогда $12 = 12$.
Почему же большее решений нет
Пусть $p = 5$

$28 < 48$.

При любом $p \geq 7$, $p^2 < 2^{p-1}$, т.к.
$49 < 64$
в левой части неравенства возрастает
число под степенью, а во 2 степень. ~~степе~~

Ответ: $p=2, q=3; q=2, p=3$. Чистовик

Задача №4

Проспекты - 10 (шт)

Улицы - 23 (шт)

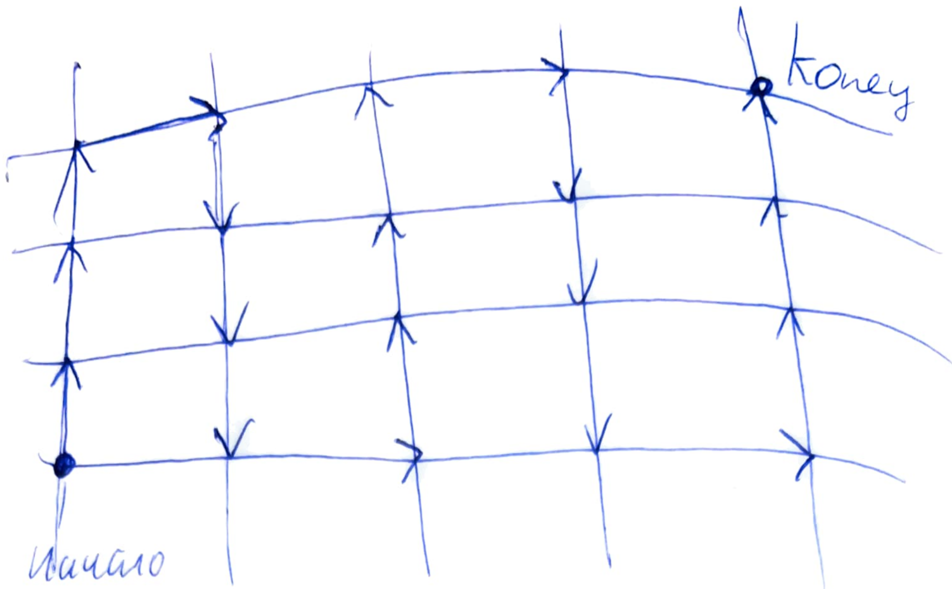
Перекрестки - 230 (шт)

Дороги - $22 \cdot 10 + 23 \cdot 9 = 427$ (шт)

Оценка: представим какое наименьшее число дорог должно работать, чтобы можно было из каждого города добраться в любой другой. Решим эту проблему с помощью графов. Перекрестки - вершины, а дороги - ребра. Всего может быть максимум 229 вершины из которых выходит по 1 ребру и они будут связаны с 1 городом. Значит минимум должно работь 229 дорог. Т.е. 228 дорог не хватит, т.к. тогда 1 дорога связывает 2 ~~города~~ проспекта, 2 дороги 3 проспекта и т.д. присоединить ещё 1 вершину нужно ещё 1 ребро. Значит 229 дорог.

А теперь рассмотрим пример как будут соединены дороги.

Пример на (5 улиц и 4 проспекта). Чистовик



Т.е. путь строится змейкой.

Начинаем путь с пересечения 1 проспекта и 1 улицы, затем двигаемся по этой улице до пересечения с 10 проспектом и переходим на пересечение 2 улицы и 10 проспекта, затем по этой улице двигаемся до 1 проспекта и т.д. до пересечения 23 улицы с 10 проспектом

427 - 229 = 198 участков можно ремонтировать.

Ответ: 198 участков.

Задача №1 Чистовик

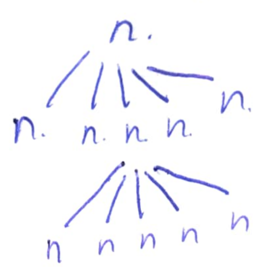
Пустые - 101 п.

Всего - ? п.

Пусть изначально есть 1 пакет с 5 пустыми в нём. Полные - 1п., пустые - 5п.

рис. 1.

Из 1 пустого пакета сделаем не пустой.



Полные - 2 п.

Пустые - 9п.

Т.е. с каждым разом при добавлении 1 нового пакета добавляется 4 пустых. Но изначально было на 1 полный 5 пакетов. Т.е. к общему кол-во пустых пакетов надо добавить еще 1.

Пусть x пакетов полные, значит $4x+1$ - пустые

Известно, что 101 пустой пакет

$4x+1=101$, $x=25$. Значит всего $x+4x+1=5x+1$ п.

$5x+1=25\cdot5+1=126$ пакетов.

Ответ: 126 пакетов.

Задача №5 Чистовик

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n = \frac{b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3} = b_{n-3}\left(\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\right)^3$

~~$b_1 =$~~ $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2$

$b_4 = \frac{2\cdot 8}{1} = 16$

$b_5 = \frac{1\cdot 16^3}{8} = 16^2\cdot 2 = 16\cdot 32$

$b_6 = \frac{2\cdot(16^2\cdot 2)^3}{16^3} = 16^3\cdot 4 = 16\cdot 32^2$

Пусть $b_{n-3} = b_4$, $b_{n-1} = b_6$, а $b_{n-2} = b_5$.

тогда $b_{n-1} = 32^2(b_{n-3})$, $b_{n-2} = 32(b_{n-3})$

$b_{n-1} = 32(b_{n-2})$

$b_n = b_{n-3}\cdot\left(\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\right)^3 = b_{n-3}\cdot\left(\frac{32^2(b_{n-3})}{32(b_{n-3})}\right)^3 = 32^3(b_{n-3}) = 32(b_{n-1})$.

Значит опять $b_n = 32(b_{n-1})$.

Получается, что последовательность все время будет увеличиваться в 32 раза, т.к. разница в кол-ве раз между b_n и b_{n-1} не меняется.

$b_4 = 16$, $b_{2023} = 16\cdot 32^{(2023-4)} = 16\cdot 32^{2019}$

Ответ: $16\cdot 32^{2019}$.

Задача № 2 Чистовик

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{339} - \frac{1}{400}$$

$$\frac{b}{a} = \underbrace{1-2}_{-1} + \underbrace{3-4}_{-1} + \ldots + \underbrace{339-400}_{-1}$$ (Разбьем на пары $(1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+(337-338)+(339-400) = -1 \cdot 200 = -200$, т.к. 200 пар $\left(\frac{400}{2}\right)$).

$$\frac{b}{a} = -\frac{200}{1}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{200}$$

$a = -1.$

Задача № 6

Покори Воробьёвы горы Стратегия за 1:

О - 5 шт.	|||||	
Р - 3 шт.	|||	
Ы - 2 шт	||	
В - 2 шт.	||	
П - 1 шт			
К - 1 шт.			
И - 1 шт.			
Б - 1 шт.			
Ь - 1 шт.			
Ё - 1 шт.			
Г - 1 шт			

1 ход убираем 3 „О" из 5.

Если 2-й заберёт 1 из букв по 1 штуке, то 1 забирает 1 букву „Р" из 3.

Если 2-й заберёт 1 из букв по 2 штуки, то 1-й забирает 3 буквы „Р".

Если 2-й заберёт 2 из букв по 2 штуки, то 1-й забирает 2 буквы „Р" из 3.

Если 2-й заберёт 1 из букв „Р", то 1-й заберёт 1 из букв по 1 штуке, если 2-й заберёт 2 из 3 букв „Р", то 1-й заберёт 2 буквы О. Если 2-й заберёт 3 буквы „Р", то 1-й заберёт 1 букву „О".

~~Если~~ ~~после~~ После 3 сделанных ходов ~~1 будет~~ 1-ый будет ходить аналогично 2-му, т.е. если 2-й забирает 1 из букв по 1 штуке, то 1-ый тоже забирает 1 из букв по 1 штуке, если 2-ый заберёт 1 из букв по 2 штуки, то 1-ый тоже заберёт 1 из букв по 2 штуки, ~~на~~ но из других букв.

Если 2-ый забирает 2 буквы из 2 штук, то 1 тоже забирает 2 буквы из 2 штук.

~~А узнс~~ Это всегда будет работать, т.к. кол-во букв по 2 штуке и по 1 штуке осталось четное. А значит пока ход может сделать 2-ый, то может сделать и 1 игрок.

Ответ: Выиграет 1-ый (Алиса).

Чистовик

Черновик

$\frac{b}{a} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots + 339 - 400$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1\cancel{7}}{15}$

$\frac{6}{5} = \cancel{2+3}\ 1 - 2 + 3 = 2$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

10 ~~32~~ 34

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\cancel{2}}{6}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ 18 26 $\frac{1}{42}$

$1 : \frac{6}{1} = 6\ \frac{5}{6}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

$1 - 2 + 3 = 2$ $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$

$\frac{1}{2}$ 1 - 3 из 5 $\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$

90 - 56 = 34 $\frac{1}{110}$

12 11 132

Черновик

Покори Воробьевы горы

7 ходов по 1 букве

П – 1

О – 5

К – 1 . $b_n = b_{n-3} \cdot 32 \cdot 4$

Р – 3

И – 1

В – 2

Ь – 1

Б – 1

Е – 1

Ы – 2м

Г – 1

25

126

1 ходом – убираем 1 из букв, которые 1

5п.; 5п.; 5п.; 5п.; 5п.

$b_1 = 2$

$b_2 = 1$

$b_3 = 2$

$b_4 = 16$

$b_5 = 16 \cdot 16 \cdot 2$

$b_6 = \frac{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4}{16 \cdot 8}$

$b_7 = 32^3 \cdot 16 =$

$\frac{16}{16} =$

$16^2 \cdot 4$

1) 5; 0 0 0 0 0

2) 5; 1 0 0 0 0

3) 5; 1 1 0 0 0

4) 5; 1 1 1 0 0

5) 5; 1 1 1 1 1

6) 5; 1 1 1 0

$\frac{b_n}{b_{n-1}^3} = \frac{b_{n-3}^3}{b_{n-2}}$

в конце все 1 буквы

$b_6 = \frac{2 \cdot (16 \cdot 16 \cdot 2)^3}{16^3} = 2^{?}$

все по

в полусе

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3} =$

$= \frac{2 \cdot 8}{1} = 16$

$b_4 = b_1 = \frac{1 \cdot 16^3}{8} = 16 \cdot 16 \cdot 2 =$

$\frac{16 \cdot (16^3 \cdot 4)^3}{(16 \cdot 16 \cdot 2)^3} = \frac{16 \cdot 16^3 \cdot 4^3}{8} =$

$\frac{16^3 \cdot 16}{} = \frac{16^5 \cdot 4}{8} = 16^4 \cdot 4 \cdot 2$

черновик

Проспектов - 10 шт

Улица - 23 шт.

перекрёстк. - 230 шт

1п. +4п.

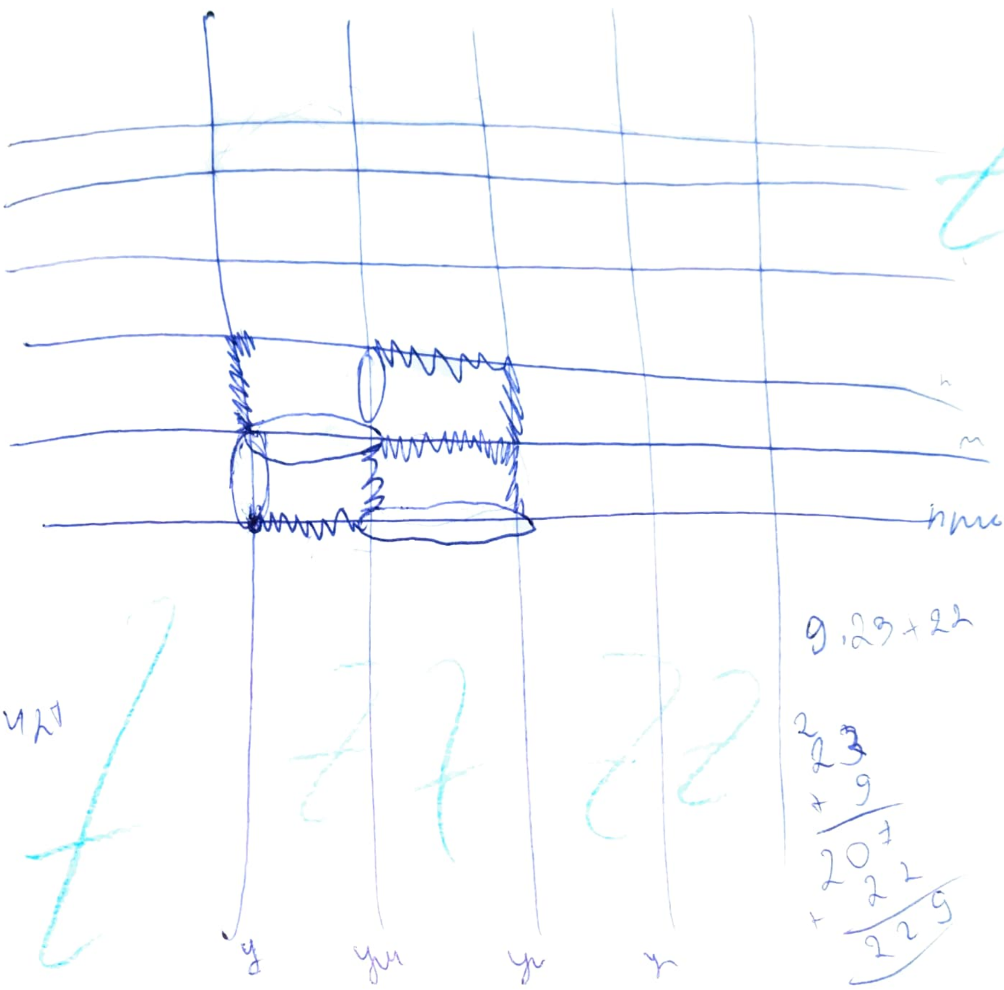
$x = 25$

$4x+1 = 101$

$4x = 100$

$x = 25$

$x+4 = 101$



$9 \cdot 23 + 22$

$23 \cdot 9 = 207$

$207 + 22 = 229$

427

$9 \cdot 23 + 22 \cdot 10 = 220 + 207 = 427$ (д.)

$229 + 198 = 427$

$23 \cdot 9 = 207$

$b_{n-3} \cdot \left(\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\right)^3 = b_{n-3} \cdot \left(\frac{16^2 \cdot 4b_{n-3}}{16 \cdot 2b_{n-1}}\right)^3 = b_{n-3} \cdot 32^3$

$b_n = b_{n-3} \cdot 32^3$

229 д. 90ч

$427 - 229 = 198$

Черновик

1п – 0п

1п – 5п

Всего – ? п.

Пустые – 101п.

Пусть $d=2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p \vdots 3$

$p=3$

неч. – ч

не ч.

$p^2 = p^2+3 = 2^{p-1} + 2^p$

$p^2+3 = 2^{p-1}(1+2)$

$p^2+3 = 3 \cdot 2^{p-1}$

$p^q - d^p + 3 = 2^{p-1}$

всегда чётное

5 п.

5

0

0 5 5 5 5

$2^2 + 2^3 = 2^2(1+2) =$
$= 4+8 = 12 = 4 \cdot 3 = 12$

$2^4 + 2^5 = 2^4(1+2) =$
$= 16 \cdot 3 = 48$

левая часть чётная

п. п. п

$p^q - q^p$ – ~~чётное~~ нечётное.

$p=2, q=3.$

$12 = 12$

5

значит одно из чисел p или q равно 2

2^n или n^2

ч ч

a – нечет.

$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$

Пусть $p=2$

$\cancel{p}$ п

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q = q^2 - 1$

$d=3.$