Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2022/2023 учебного года для 5-6 класса

1. На острове Рыцарей и Лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Недавно на острове появилось новое племя - Двурушники. Они говорят правду или ложь через раз, т.е. если двурушник сказал правду, то в следующий раз обязательно скажет ложь - и наоборот. Однажды путешественник спросил троих жителей A, B и C - кто они.

А сказал: *«B - двурушник».*

B ответил - *«Это неправда».*

C сказал - «*B сейчас солгал».*

А сказал - *«C сейчас солгал».*

Определите, кем является А.

Ответ: А- двурушник.

Решение: Допустим, что А - рыцарь, тогда В солгал, а С сказал правду, следовательно А солгал - противоречие.

Аналогично, если А - лжец, то В сказал правду, а С солгал, тоже приходим к противоречию.

2. На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

Ответ: 126 пакетов.

Решение: Возьмем один, изначально пустой, пакет и будем последовательно добавлять по 5 пакетов. Когда мы в какой-то из пустых пакетов кладем 5 пакетов, число пустых пакетов увеличивается на 4. Значит эта операция была проделана (101-1)/4 = 25 раз. Следовательно, общее количество пакетов равно 1+25*5=126.

3. Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток дает a при делении на 601?

Ответ:0

Решение: Прибавим и вычтем $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{400}\right)$, получим

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{399} + \frac{1}{400} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{400}\right) = \frac{1}{201} + \ldots + \frac{1}{400}$$

Сгруппируем попарно:

$$\left(\frac{1}{201} + \frac{1}{400}\right) + \left(\frac{1}{202} + \frac{1}{399}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301}\right) = \frac{601}{201 \cdot 400} + \frac{601}{202 \cdot 399} + \ldots + \frac{601}{300 \cdot 301}$$

После приведения к общему знаменателю числитель кратен 601, а знаменатель - нет, т.к. 601- простое число. Значит оно не сократится со знаменателем.

4. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

Ответ: (2,3) (3,2). Заметим, что одно из них должно быть четным (чтобы левая часть была четной), и разбираем два варианта:
1) $p = 2$,

$$2^q - q^2 + 3 = 2^{2-1} \Rightarrow 2^q = (q-1)(q+1)$$

Из единственности разложения на простые множители вытекает, что $q \pm 1$ должны быть степенями двойки, разница между которыми равна 2, что возможно только при $q = 3$.
2) $q = 2$.

$$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \Rightarrow p^2 = 3(2^{p-1} - 1) \Rightarrow p^2 \vdots 3 \Rightarrow p = 3.$$

5. Существуют ли три попарно различные натуральные числа a, b, c такие, что $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$ является квадратом целого числа?

Ответ: Да, например, возьмем $b = 2a, c = 3a$. Тогда $\mathrm{a}^{2023} + (2\mathrm{a})^{2023} + (3\mathrm{a})^{2023} = \mathrm{a}^{2023} \cdot (1 + 2^{2023} + 3^{2023})$

При $\mathrm{a} = (1 + 2^{2023} + 3^{2023})$ это будет a^{2024}, т.е. точный квадрат.

Рис. к задаче 5.

6. В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть "*перекрестком*". Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрестками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?

Ответ: 198.
Решение: В городе 230 перекрестков. Заметим, что для того, чтобы из каждого перекрестка можно было проехать в каждый, должно остаться не менее 229 участков дороги. Действительно, представим себе, что путешественник выезжает из какого-то перекрестка и хочет объехать их все. При этом он отмечает все участки, которые проехал и все перекрестки, которые посетил. Каждый

раз, когда он приезжает в неотмеченный перекресток, он едет по неотмеченному участку. В начале у него 230-1 неотмеченный перекресток (начальный перекресток не считается), значит должно быть не менее 229 участков, по которым можно ездить.
Изначально имеется $9 \cdot 23 + 10 \cdot 22 = 427$ участков дороги, значит можно удалить не более $427 - 229 = 198$ участков.
Покажем, что можно удалить ровно 198 участков. Будем ремонтировать все участки, принадлежащие улицам со 2 по 23 (улицу №1 не трогаем). Очевидно, из каждого перекрестка все еще можно проехать в каждый. На каждой из улиц (кроме 1-й) удалили по 9 участков, всего $9 \cdot 22 = 198$ участков.