Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2022/2023 учебного года для 7-8 класса

1. На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой(не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой).

Ответ: 126 пакетов.
Решение: Возьмем один, изначально пустой, пакет и будем последовательно добавлять по 5 пакетов. Когда мы в какой-то из пустых пакетов кладем 5 пакетов, число пустых пакетов увеличивается на 4. Значит эта операция была проделана (101-1)/4 = 25 раз. Следовательно, общее количество пакетов равно 1+25*5=126.

2. Пусть $\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{399}-\frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток дает a при делении на 601?

Ответ:0
Решение: Прибавим и вычтем $2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{400}\right)$,получим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{399}+\frac{1}{400}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{400}\right)=\frac{1}{201}+\ldots+\frac{1}{400}$$

Сгруппируем попарно:

$$\left(\frac{1}{201}+\frac{1}{400}\right)+\left(\frac{1}{202}+\frac{1}{399}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{301}\right)=\frac{601}{201\cdot 400}+\frac{601}{202\cdot 399}+\ldots+\frac{601}{300\cdot 301}$$

После приведения к общему знаменателю числитель кратен 601, а знаменатель - нет, т.к. 601-простое число. Значит оно не сократится со знаменателем.

3. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено равенство

$$p^q-q^p+3=2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

Ответ: (2,3) (3,2). Заметим, что одно из них должно быть четным (чтобы левая часть была четной), и разбираем два варианта:
1) $p=2$,

$$2^q-q^2+3=2^{2-1}\Rightarrow 2^q=(q-1)(q+1)$$

Из единственности разложения на простые множители вытекает, что $q\ \pm 1$ должны быть степенями двойки, разница между которыми равна 2, что возможно только при $q=3$.
2) $q=2$.

$$p^2-2^p+3=2^{p-1}\Rightarrow p^2=3(2^{p-1}-1)\Rightarrow p^2\ \vdots\ 3\Rightarrow p=3.$$

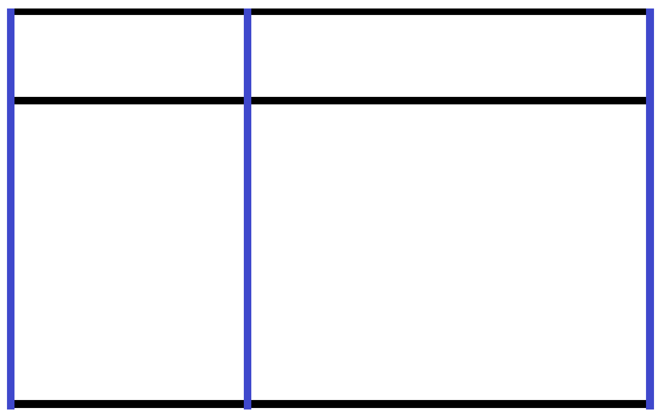

Рис. к задаче 3.

4. В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть "*перекрестком*". Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрестками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?

Ответ: 198.
Решение: В городе 230 перекрестков. Заметим, что для того, чтобы из каждого перекрестка можно было проехать в каждый, должно остаться не менее 229 участков дороги. Действительно, представим себе, что путешественник выезжает из какого-то перекрестка и хочет объехать их все. При этом он отмечает все участки, которые проехал и все перекрестки, которые посетил. Каждый раз, когда он приезжает в неотмеченный перекресток, он едет по неотмеченному участку. В начале у него 230-1 неотмеченный перекресток (начальный перекресток не считается), значит должно быть не менее 229 участков, по которым можно ездить.
Изначально имеется $9 \cdot 23 + 10 \cdot 22 = 427$ участков дороги, значит можно удалить не более $427 - 229 = 198$ участков.
Покажем, что можно удалить ровно 198 участков. Будем ремонтировать все участки, принадлежащие улицам со 2 по 23 (улицу №1 не трогаем). Очевидно, из каждого перекрестка все еще можно проехать в каждый. На каждой из улиц (кроме 1-й) удалили по 9 участков, всего $9 \cdot 22 = 198$ участков.

5. Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех $n = 4, 5, 6, \ldots$
Найдите b_{2023}, если известно, что $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2$.
Ответ: 2^{2021^2}
Решение: Рассмотрим несколько следующих членов: 16, 512,… - возникает гипотеза, что все члены последовательности является степенями двойки. Проверим ее, обозначим $b_n = 2^{a_n}, n = 1, 2, \ldots, 2023$ и подставим в соотношение, получим $a_n + 3a_{n-2} = a_{n-3} + 3a_{n-1}$, при $n = 4, 5, \ldots$
Это равенство можно преобразовать к виду:

$$(a_n - a_{n-1}) - 2(a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) = 0.$$

Обозначим $c_n = a_n - a_{n-1}$, тогда для , $n = 3,4 \ldots$

$$c_n - 2c_{n-1} + c_{n-2} = 0 \Rightarrow c_n - c_{n-1} = c_{n-1} - c_{n-2}$$

Таким образом, расстояния между членами c_n постоянны, следовательно, c_n - арифметическая прогрессия. Поскольку $c_2 = -1, c_3 = 1,$ то дальше будут идти члены 3,5,… - нечетные числа, получаем $c_n = 2n - 3$. Заметим, что $a_n = a_{n-1} + c_n = a_{n-2} + c_{n-1} + c_n = \cdots = a_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Известно, что сумма первых *n* нечетных чисел равна квадрату их количества, поэтому $c_2 + c_3 + \cdots + c_{2023} = -1 + 2021^2$. Прибавив $a_1 = 1$, получаем $a_{2023} = 2021^2 \Rightarrow b_{2023} = 2^{2021^2}$.

6. Алиса и Боря по очереди зачеркивают буквы в надписи «Покори Воробьевы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

Ответ: Да, Алиса первым ходом зачеркивает 3 буквы «О».

Решение. В надписи 5 букв «О», 3 «Р», 2 «В», 2 «Ы» и по одной «Б», «Г», «Е», «И», «К», «П», «Ь». Для краткости запишем это в виде (5,3,2,2, 1_{x7}) и будем называть этот набор чисел позицией игры. Заметим, что если позиция симметрична (например (2,2,1_{x4})) то начинающий с этой позиции игрок проигрывает, т.к. второй может просто повторять его ходы. Первый ход Алисы приводит к позиции (3,2,2,2,1_{x7}). Рассмотрим, как может пойти Боря:

1) Удалить группу размера 3 и получить позицию (2,2,2,1_{x7}). Тогда Алиса удаляет одну букву (и группы размера 2) и получает симметричную позицию (2,2,1_{x8}).

2) Удалить 2 буквы из группы размера 3, позиция (2,2,2,1_{x8}). Тогда удалив 2 буквы, Алиса получит симметричную позицию (2,2,1_8).

3) Удалить одну букву из группы размера 3. Получаем (2,2,2,2,1_{x7}), их которого можно получить (2,2,2,2,1_{x6}).

4) Удалить группу размера 2 и получить (3,2, 2,1_{x7}). Тогда Алиса удаляет 2 буквы из первой группы и получает (2, 2,1_{x8}).

5) Удалить одну букву из группы размера 2 и получить (3,2,2, 1_{x8}). Тогда удаляем первую группу и получаем (2, 2,1_{x8}).

6) Удалить букву из группы размера 1 и получить (3,2,2,2,1_{x6}). Удалив одну букву из первой группы получим (2,2,2,2,1_{x6}).