Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2022/2023 учебного года

Вариант 10-С-1

1. Решите уравнение

$$1-\sqrt{2}\sin x\,(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x\,(2\cos x-\sin x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Из пункта *A* в пункт *B* по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт *B* они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в *B*, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3-6x^2+7x-1=0$. При каких значениях *a*, *b*, *c* корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника *ABC*, если $AB=\sqrt{13}$.

5. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\dots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2.$$

Апрель 2023 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2022/2023 учебного года

Вариант 10-С-2

1. Решите уравнение

$$1-\sqrt{2}\cos x\,(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x\,(2\sin x-\cos x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Из пункта *A* в пункт *B* по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час раньше, при этом в пункт *B* они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в *B*, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3+6x^2+7x+1=0$. При каких значениях *a, b, c* корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника *ABC*, если $AB=\sqrt{26}$.

5. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\cdots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\geq N^2.$$

Апрель 2023 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. После преобразований

$$1-\sqrt{2}\sin x\,(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x\,(2\cos x-\sin x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$1-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x\sin x=1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x,$$

уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} 2x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

1-2. Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

2-1. Ответ: 16:00 или 19:00.

Решение. Можно рассмотреть четыре случая (они соответствуют тому, что кто-то один из двоих стартовал первым, и кто-то один из двоих сделал остановку).

Но можно заметить, что если остановку делал велосипедист, то не важно, выехал он раньше или позже мотоциклиста, в движении он находился меньше времени, чем мотоциклист, и поэтому в B приедет позже. Значит, остановку делал мотоциклист. Тогда, обозначая через t время движения велосипедиста и через V его скорость, получаем два случая:

а) Если велосипедист выехал раньше, то $Vt=2V(t-3)$, откуда $t=6$. Поэтому время финиша равно 13:00 + 6 = 19:00.

б) Если мотоциклист выехал раньше, то $Vt=2V(t-1)$, откуда $t=2$. Тогда время финиша равно 14:00 + 2 = 16:00.

2-2. Ответ: 15:00 или 18:00.

3-1. Ответ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$.

Решение. Так как $f(x)=x^3-6x^2+7x-1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, то можно доказать, что

$x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$, $x_1x_2x_3=1$ (то же самое можно получить из теоремы Виета для кубического уравнения).

Аналогично для второго уравнения: $-a=(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)$;

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_2+x_3)$;

$-c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$.

Из первого соотношения получаем $a=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$.

Из второго соотношения:

$$b=\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2^2\right)+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1^2\right)+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\right)$$

$$=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) = (x_1+x_2+x_3)^2+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right) = 6^2+7=43.$$

Наконец, $c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2)$

$$=-f(6)=-(6^3-6\cdot6^2+7\cdot6-1) = -41.$$

Таким образом, второе уравнение имеет вид: $x^3-12x^2+43x-41=0$.

Можно поступить иначе. По условию второй многочлен равен

$$(x-x_2-x_3)(x-x_1-x_3)(x-x_1-x_2) = (x-6+x_1)(x-6+x_2)(x-6+x_3)$$

$$=(x-6)^3+(x-6)^2(x_1+x_2+x_3)+(x-6)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3$$

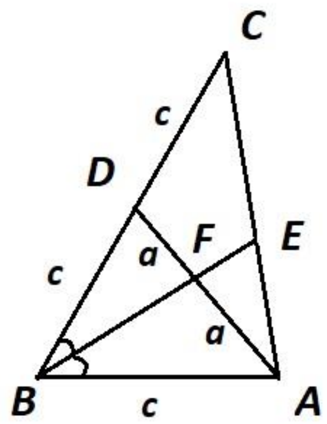
$$=(x-6)^3+6(x-6)^2+7(x-6)+1 = (x^2-12x+36)(x-6+6)+7x-42+1$$

$=x^3-12x^2+36x+7x-41 = x^3-12x^2+43x-41$. Отсюда сразу получается ответ.

3-2. Ответ: $a=12$, $b=43$, $c=41$.

4-1. Ответ: 12.

Решение. Пусть $BE = AD = 2a$, $AB = c$. Так как BF – высота и биссектриса треугольника ABD, то этот треугольник равнобедренный, поэтому $AB = BD = c$, $BC = 2c$, и по формуле для длины биссектрисы (здесь $\beta = \angle ABC$):



$$2a = \frac{2 \cdot 2c \cdot c}{2c + c} \cos\frac{\beta}{2}, \text{ то есть } \frac{3a}{2} = c \cdot \cos\frac{\beta}{2}.$$

Из треугольника ABF получаем $a = c \cdot \sin\frac{\beta}{2}$.

Значит, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = c^2 \sin\beta = \frac{12}{13}c^2 = 12$.

Возможны и другие способы решения. Например, в треугольнике ABC известны две стороны $AB = c$ и $BC = 2c$. Обозначим $AE = b$, $CE = 2b$. После этого выразим через b биссектрису BE (формула $BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot CE$) и медиану AD и приравняем их. Находим b, а после этого площадь либо по формуле Герона, либо с помощью теоремы косинусов.

4-2. Ответ: 24.

5-1. Ответ: 5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236.

Решение. Заметим, что если имеется разложение числа N на простые делители

$$N = t_1^{m_1} \cdot t_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot t_l^{m_l},$$

то $\sigma(N) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_l + 1)$ и $\sigma(N^3) = (3m_1 + 1)(3m_2 + 1) \cdots (3m_l + 1)$.

Из условия вытекает, что $\sigma(N) \geq 1877$. Разберем несколько случаев:

1. Пусть $\sigma(N) = 1877$. Тогда

$$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_{1876} = \frac{N}{p_2} < p_{1877} = N.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877} = \frac{p_3 \cdot p_4}{p_2} \cdot N^2 \geq N^2$. Значит, этот случай нам подходит.

Поскольку 1877 — простое, то $\sigma(N)$ по приведенной выше формуле могло получиться только как $1877 = (1876 + 1)$, то есть в этом случае возможен только вариант $N = p^{1876}$, где p — простое число. Следовательно, $\sigma(N^3) = (3 \cdot 1876 + 1) = 5629$.

2. Пусть $\sigma(N) = 1878$. Тогда

$$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_{1876} = \frac{N}{p_3} < p_{1877} = \frac{N}{p_2} < p_{1878}.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877} = \frac{p_4}{p_2} \cdot N^2 \geq N^2$. Этот случай подходит. Поскольку $1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$, то существует несколько разложений следующего вида $1878 = (1877 + 1) = (1 + 1)(938 + 1) = (2 + 1)(625 + 1) = (5 + 1)(312 + 1) = (1 + 1)(2 + 1)(312 + 1)$. Откуда все возможные значения $\sigma(N^3)$ в этом случае равны: $(3 \cdot 1877 + 1) = 5632$, $(3 \cdot 1 + 1)(3 \cdot 938 + 1) = 11260$, $(3 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 625 + 1) = 13132$, $(3 \cdot 5 + 1)(3 \cdot 312 + 1) = 14992$, $(3 \cdot 1 + 1)(3 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 312 + 1) = 26236$.

3. Пусть $\sigma(N) = 1879$. Тогда

$$1 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_{1876} = \frac{N}{p_4} < p_{1877} = \frac{N}{p_3} < p_{1878} = \frac{N}{p_2} < p_{1879} = N.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877} = N^2$. Этот случай подходит. Поскольку 1879 — простое, то существует только одно разложение вида $1879 = (1878 + 1)$. Поэтому в этом случае возможен только вариант вида $N = p^{1878}$, где p — простое число. Следовательно, $\sigma(N^3) = (3 \cdot 1878 + 1) = 5635$.

4. Пусть $\sigma(N) \geq 1880$. Тогда $p_{1876} < \frac{N}{p_3}$, $p_{1877} < \frac{N}{p_2}$. Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877} < N^2$. Этот случай нам не подходит.

5-2. Ответ: 5089, 5092, 5095, 10180, 11872, 13552, 23716.

ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ – 2022-23. МАТЕМАТИКА.

Критерии проверки. 10 класс

Каждая из пяти задач оценивается в 20 баллов. Максимальная оценка = 100 баллов.

В каждой из задач за различные недостатки (ошибки в логике, пропущенные переходы, недостатки обоснований, ошибки и т. д.), могло быть снято от 5 до 20 баллов. Кроме этого, некоторые стандартные ошибки описаны ниже.

Задача № 1 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Одна вычислительная ошибка при правильном способе решения, или правильно получено простейшее тригонометрическое уравнение, при решении которого допущена ошибка	$\pm$	15
Более одной вычислительной ошибки или любые другие ошибки в тригонометрических формулах	$-$	0

Задача № 2 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Рассмотрены все 4 случая (при этом 2 из них могут быть обоснованно отброшены из логических соображений), но ответ неверен из-за вычислительных ошибок	$\pm$	15
Рассмотрены не все случаи, но два правильных ответа получены	$\pm$	15
Рассмотрены не все случаи, получен только один ответ	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение, но одна из трех величин посчитана неверно из-за вычислительных ошибок	$\pm$	15
Идейно верное решение, но две из трех величин посчитаны неверно из-за вычислительных ошибок	$+/2$	10
Идейно верное решение, но все три величины посчитаны неверно из-за вычислительных ошибок	$\mp$	5
Ошибки при использовании теоремы Виета, в остальном решение идейно верное	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
Использован правильный способ решения, но ответ неверен из-за арифметических ошибок	$\pm$	15
Решение идейно правильное, но не доведено до конца	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	Плюсы-минусы	Балл
При идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки, или получены все случаи, но подсчеты не доведены до конца	$\pm$	15
Обосновано получена часть ответа. Верно рассмотрено не меньше двух правильных ситуаций. Нет обоснования, что большие значения σ(N) не подходят	$+/2$	10
Обосновано получена часть ответа. Верно рассмотрен одна из правильных ситуаций. Нет обоснования, что большие значения σ(N) не подходят	$\mp$	5