ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

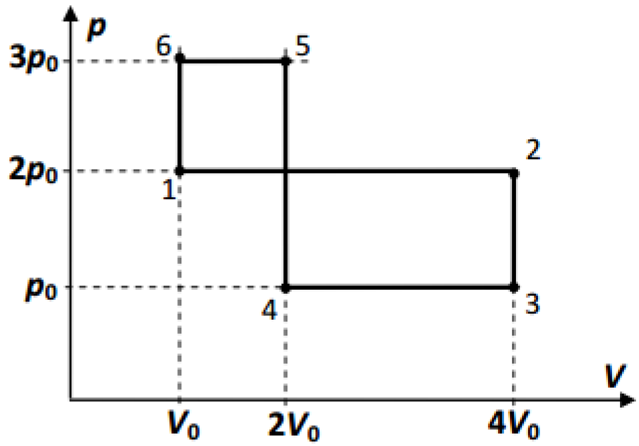
2022/23 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 классы.

Задание отборочного тура состояло из двух частей. В части I предлагалось три вопроса, ответ к которым (без решения) нужно было загрузить в специальную форму на сайте олимпиады. Вопросы у участников различались числовыми данными, выбираемыми автоматически из широкого диапазона значений. В части II (творческой) предлагалось 4 одинаковых для всех участников задачи, к которым требовалось загрузить ответы и решения, причем оценка определялась по результатам проверки решений.

Часть I (проверяются ответы), пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

Над постоянным количеством идеального газа произвели процесс 1-2-3-4-5-6-1, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Вычислите количество теплоты, которым газ в этом процессе обменялся с окружающими телами, если p_0 = 50 кПа, а V_0 = 3 л. Ответ запишите в Дж, с учетом знака (Q>0 соответствует получению газом теплоты), без указания единиц измерения.



Ответ: 150.

Комментарий: Согласно I Началу термодинамики, $Q = A + \Delta U$. В циклическом процессе $\Delta U = 0$, так что полученное газом тепло равно совершенной им работе, а она численно равна площади контура процесса в координатах давление-объем с учетом направления обхода. Здесь контур состоит из двух частей с противоположным направлением обхода, так что $Q = A = +2p_0V_0 - p_0V_0 = +p_0V_0 = +150$Дж.

Вопрос 2 (9 баллов):

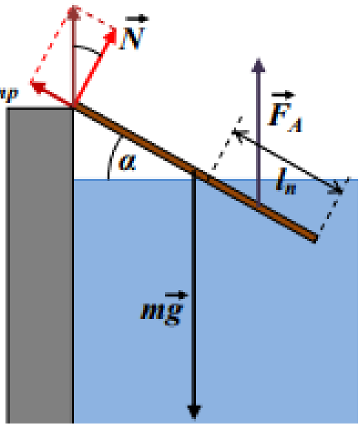
14 одинаковых маленьких заряженных шариков с зарядом q = 1 мкКл у каждого закреплены в вершинах правильного 14 – угольника, у которого радиус описанной окружности равен 3 см. По тонкому диэлектрическому стержню длиной 3 м равномерно распределен заряд Q = 3 мкКл. Стержень размещен перпендикулярно плоскости, в которой находятся шарики, и один из его концов оказался точно в центре 14-угольника. Найдите величину силы, действующей на стержень со стороны электрического поля шариков. Ответ запишите в Н, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Ответ: 4,2.

Комментарий: Направим ось x вдоль стержня, совместив начало координат с началом стержня (и, естественно, с центром N-угольника). Работа искомой силы над стержнем при малом перемещении его вдоль этой оси равна $dA = F_x \cdot dx$. Эта работа может быть вычислена как взятое со знаком «минус» изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов системы при таком перемещении. Очевидно, что с точки зрения изменения относительного положения зарядов это перемещение эквивалентно «отрезанию» от конца стержня, находящегося в центре многоугольника из зарядов, кусочка длиной dx с зарядом $\frac{Q}{L}dx$ и переносу его на другой конец стержня. Поэтому $F_x \cdot dx = -dE_n = \left(\frac{kNq}{r} - \frac{kNq}{\sqrt{r^2+L^2}}\right)\frac{Q}{L}dx$, и $F_x = \frac{kNQq}{Lr}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+L^2}}\right) \approx 4{,}2\,\text{Н}$. Впрочем, поскольку $\frac{r}{L} = 0{,}01$, то в рамках заданной точности последнее слагаемое в скобках несущественно, и можно пользоваться более простой формулой $F_x \approx \frac{kNQq}{Lr}$.

Вопрос 3 (9 баллов):
Однородная тонкая доска длины L = 1 м лежит неподвижно, опираясь «самым краешком» на борт бассейна. Другой ее конец находится в воде, уровень которой в бассейне на h = 24 см ниже этого борта. Плотность дерева, из которого изготовлена доска, ρ = 0,4 г/см^3. Плотность воды в бассейне ρ_0 = 1,0 г/см^3. При какой минимальной величине коэффициента трения между краем бассейна и доской такое возможно? Ответ запишите с точностью до сотых.

Ответ: 0,33.
Комментарий: На неподвижную доску действуют сила тяжести, сила Архимеда и две силы реакции – сила нормальной реакции борта бассейна и сила трения об этот борт. Так как



силы тяжести и Архимеда направлены вертикально, то равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$ тоже вертикальна, и поэтому в положении равновесия $F_{mp} = N \cdot \text{tg}(\alpha)$, где α – угол наклона доски к горизонту. С другой стороны, величина силы трения покоя должна удовлетворять требованию $F_{mp} \le \mu N$, и поэтому возникает и требование к коэффициенту трения $\mu \ge \text{tg}(\alpha)$, то есть $\mu_{\min} = \text{tg}(\alpha)$. Запишем теперь для доски условие равновесия моментов сил относительно точки опоры $+F_A \cdot l_A - mg \cdot l_g = 0$. Величина силы тяжести для доски с сечением S равна $mg = \rho SLg$, и ее плечо $l_g = \frac{L}{2}\cos(\alpha)$. Величина силы Архимеда $F_A = \rho_0 S l_n g$ ($l_n = L - \frac{h}{\sin(\alpha)}$ – длина погруженной в воду части доски), а ее плечо $l_A = \left(L - \frac{l_n}{2}\right)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{h}{\sin(\alpha)}\right)\cos(\alpha)$. Как видно, уравнение моментов позволяет найти α:

$$\rho L^2 - \rho_0\left(L - \frac{h}{\sin(\alpha)}\right)\left(L + \frac{h}{\sin(\alpha)}\right) = 0 \Rightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1-\rho/\rho_0 - x^2}}, \text{ где } x \equiv \frac{h}{L}.$$

В данном варианте $x = 0{,}24$, $1 - \frac{\rho}{\rho_0} = 0{,}6$. Таким образом, $\mu_{\min} = \frac{x}{\sqrt{1-\rho/\rho_0 - x^2}} \approx 0{,}33$.

В этом ответе, в соответствии со смыслом искомой величины, считалось правильным не только округление до сотых по стандартным правилам, но и округление «вверх». В данном варианте ответ 0,33 является единственным – он получен округлением вверх по стандартному алгоритму.

Часть II (проверяются решения):

1. («**Эффект застоя**», 20 баллов) Существует интересное явление, связанное с силой сухого трения. Его называют *эффектом застоя* и оно состоит в превышении максимальной величины силы трения покоя над силой трения скольжения. Рассмотрим движение бруска массы m, у которого зависимость силы трения от его скорости v относительно поверхности описывается выражением:

$$F_{mp}(v)=\begin{cases} 0\div F_m\equiv\mu mg+\Delta F, \quad v=0 \\ \mu mg+\Delta F(1-v/v_0),\, 0<v\le v_0 \\ \mu mg,\, v>v_0 \end{cases}.$$

Брусок сначала подталкивают, сообщая ему скорость, равную $\dfrac{v_0}{2}$, а затем тянут его по горизонтальной поверхности по прямой, прикрепив к легкой практически нерастяжимой нити, поддерживая силу натяжения нити неизменной и с высокой точностью равной максимальной величине силы трения покоя. Как при этом зависит величина его скорости от пройденного пути? Получите общую формулу, выражающую эту зависимость.

В качестве первого и второго численного ответа вычислите $\dfrac{v(s)}{v_0}$ для двух значений пройденного пути: $s_1=\dfrac{mv_0^2}{4\Delta F}$ и $s_2=\dfrac{9mv_0^2}{8\Delta F}$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Движение бруска нужно разбить на две фазы: при скорости менее υ_0 для описания величины силы трения можно, в соответствии с условием, использовать выражение $F_{mp}(v)=\mu mg+\Delta F(1-v/v_0)$, а при $\upsilon > \upsilon_0$ сила трения постоянна: $F_{mp}(v)=\mu mg$. Запишем уравнение движения в первой фазе:

$$m\frac{dv}{dt}=F-F_{mp}(v)=\frac{\Delta F}{v_0}v.$$

Поскольку брусок не меняет направления движения, то его путь за малое время dt равен $ds=vdt$, и поэтому, суммируя малые приращения скорости бруска и его пути, находим:

$$m\,dv=\frac{\Delta F}{v_0}v\,dt=\frac{\Delta F}{v_0}ds\Rightarrow m\left(v-\frac{v_0}{2}\right)=\frac{\Delta F}{v_0}s\Rightarrow v(s)=\frac{v_0}{2}+\frac{\Delta F}{mv_0}s.$$

Скорость υ_0 достигается при $s=s_0$, где, как видно из полученной формулы, $s_0=\dfrac{mv_0^2}{2\Delta F}$.

Следовательно, значение $s=s_1$ относится именно к этому интервалу, и $v_1=\dfrac{3}{4}v_0$.

Второе значение $s=s_2$ относится уже ко второй фазе, для которой сила трения и (вместе с ней) результирующая сила $F-F_{mp}=\Delta F$ постоянны, и изменение кинетической энергии может быть вычислено по работе результирующей силы:

$$\frac{mv^2(s)}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\Delta F(s-s_0)\Rightarrow v(s)=\sqrt{v_0^2+\frac{2\Delta F}{m}(s-s_0)}=\sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s}.$$

Следовательно, $v_2=\sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s_2}=\frac{3}{2}v_0$. Общая формула, выражающая зависимость величины скорости бруска от пройденного пути, получается объединением двух полученных формул:

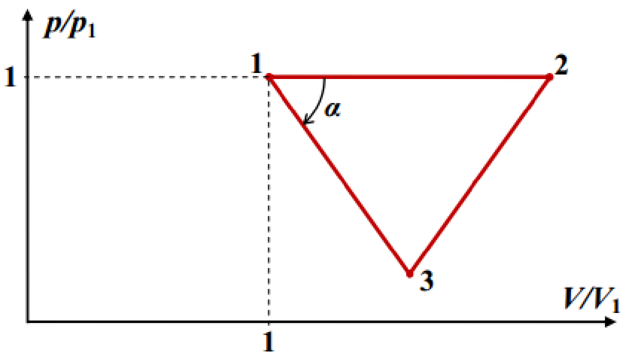
$$v(s)=\begin{cases}\frac{v_0}{2}+\frac{\Delta F}{mv_0}s,\ s\le s_0\equiv\frac{mv_0^2}{2\Delta F}\\ \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s},\quad s>s_0\equiv\frac{mv_0^2}{2\Delta F}\end{cases}.$$

ОТВЕТЫ: $v(s)=\begin{cases}\frac{v_0}{2}+\frac{\Delta F}{mv_0}s,\ s\le s_0\equiv\frac{mv_0^2}{2\Delta F}\\ \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s},\quad s>s_0\equiv\frac{mv_0^2}{2\Delta F}\end{cases}$, $v_1=\frac{3}{4}v_0$, $v_2=\frac{3}{2}v_0$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Сделан вывод о разделении движения на две фазы	**1**
Правильно записано уравнение движения для первой фазы	**1**
Получено уравнение связи изменений скорости и пути, эквивалентное $m\,dv=\frac{\Delta F}{v_0}ds$	**2**
Правильно найдена зависимость $v(s)$ на первой фазе движения	**4**
Правильно найдена $v_1=0{,}75\cdot v_0$	**3**
Для анализа второй фазы используется закон изменения энергии	**1**
Правильно найдена зависимость $v(s)$ на второй фазе движения	**4**
Правильно найдена $v_2=1{,}5\cdot v_0$	**2**
Записан общий ответ для $v(s)$	**2**
ВСЕГО	**20**

2. («**Треугольный КПД**», 20 баллов) В некотором конструкторском бюро создали серию тепловых машин, рабочим телом которых было постоянное количество одного и того же идеального газа. Диаграммы циклов всех машин в координатах давление-объем имели вид равнобедренного треугольника с основанием, параллельным оси V. Если выбрать в качестве масштабных единиц на осях диаграммы значения объема и давления в состоянии 1 (см. рисунок), то угол при основании всех треугольников окажется одинаков, и различаться циклы разных машин будут только отношением $\frac{V_{max}}{V_{min}}$. Известно



также, что этот угол выбран так, что в каждом из трех процессов, отвечающих сторонам треугольника, газ только получает или только отдает тепло (для всех используемых циклов). В таблице даны два значения КПД для циклов с разными значениями переменной $z\equiv\frac{V_{max}-V_{min}}{V_{min}}$:

z	5/11	10/17
КПД	4 %	5 %

Определите количество степеней свободы молекулы используемого газа и величину угла α. Найдите КПД цикла при $z = 1$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Начнем с определения параметров состояний. Как видно из определения нашей переменой, $V_2 = (1+z)V_1$. Поскольку треугольник равнобедренный, $V_2 - V_3 = V_3 - V_1$, и поэтому $V_3 = \left(1+\frac{z}{2}\right)V_1$. Так как величина угла при основании всегда одна и та же, то для всех циклов $\frac{p_1-p_3}{p_1} = \mathrm{tg}(\alpha)\frac{V_3-V_1}{V_1} = \mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}$. Тогда $p_1 - p_3 = \mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}p_1$ и $p_3 = \left(1-\mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}\right)p_1$.

Работа в этом цикле равна $A = \frac{1}{2}(p_1-p_3)(V_2-V_1) = \frac{p_1V_1}{4}\mathrm{tg}(\alpha)z^2$.

Ясно, что в процессе 1-2 газ только получает тепло, а в процессе 2-3 – только отдает. В процессе 3-1 может происходить изменение направления теплообмена, то есть именно на этом участке может находиться точка касания адиабаты. В соответствии с условием угол α выбран так, чтобы такая точка не была внутренней для отрезка 3-1. Значит, если такая точка и есть, то это одна из крайних точек – 1 или 3. Рассмотрим два возможных варианта: $Q_{31} < 0$ и $Q_{31} > 0$.

а) В случае $Q_{31} < 0$ газ получает тепло только в процессе 1-2, и количество теплоты нагревателя $Q_H = Q_{12} = \frac{i+2}{2}p_1(V_2-V_1) = \frac{i+2}{2}p_1V_1z$. (здесь i – число степеней свободы молекулы газа). Значит, в этом случае КПД цикла равен $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{1}{2(i+2)}\mathrm{tg}(\alpha)\cdot z$. Таким образом, если в наших циклах $Q_{31} < 0$, то значения КПД должны удовлетворять соотношению $\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{z_2}{z_1}$. Проверим: на самом деле $\frac{5}{4} \neq \frac{22}{17}$, то есть этот вариант не подходит.

б) Остается $Q_{31} > 0$. Тогда газ отдает тепло только в процессе 2-3, и количество теплоты холодильника $Q_X = -Q_{23} = \frac{p_1+p_3}{2}(V_2-V_3) + \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_3V_3)$. Используем выражения для параметров, полученные в начале, и получим:

$$Q_X = \frac{p_1V_1}{4}\left\{z\left[2-\mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}\right] + 2i\left[1+z-\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{p_1V_1}{4}z\left[2+i(1+\mathrm{tg}(\alpha)) + (i-1)\mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2}\right]$$

Значит, в этом случае

$$\eta = \frac{A}{A+Q_X} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)z}{(i+1)\mathrm{tg}(\alpha)\frac{z}{2} + 2 + i(1+\mathrm{tg}(\alpha))}$$

Для исследования этой зависимости ее удобно линеаризировать. Как видно обратная величина КПД есть линейная функция обратной величины z:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{i+1}{2} + \frac{2+i(1+\mathrm{tg}(\alpha))}{\mathrm{tg}(\alpha)}\frac{1}{z} \equiv a + \frac{b}{z}$$

По двум точкам находим коэффициенты этой зависимости:

$$\begin{cases} 25 = a + \dfrac{11b}{5} \\ 20 = a + \dfrac{17b}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases}$$

и находим число степеней свободы молекулы газа $\frac{i+1}{2} = 3 \Longrightarrow i = 5$ (то есть это двухатомный идеальный газ) и угол $\frac{7+5\mathrm{tg}(\alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha)} = 10 \Longrightarrow \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{7}{5}$. Таким образом, величина угла $\alpha = arctg\left(\frac{7}{5}\right)$. При $z = 1$ КПД равен $\eta = \frac{1}{13} \approx 7{,}7\%$.

Проверим то, что в процессе 3-1 нет состояний, в которых происходит изменение направления теплообмена. Запишем уравнение этого процесса в виде

$$p(V) = p_1 - \frac{p_1 - p_3}{V_3 - V_1}(V - V_1) = p_1\left[1 - \frac{7}{5}\left(\frac{V}{V_1} - 1\right)\right] = \frac{p_1}{5}\left[12 - 7\frac{V}{V_1}\right]$$

и будем искать точку касания с адиабатой из условия равенства нулю бесконечно малого количества теплоты, которым газ обменялся с окружающими телами в окрестности этой точки:

$$\delta Q = pdV + \frac{5}{2}d(pV) = \frac{7}{2}pdV + \frac{5}{2}Vdp = \frac{42p_1 dV}{5}\left[1 - \frac{V}{V_1}\right] = 0$$

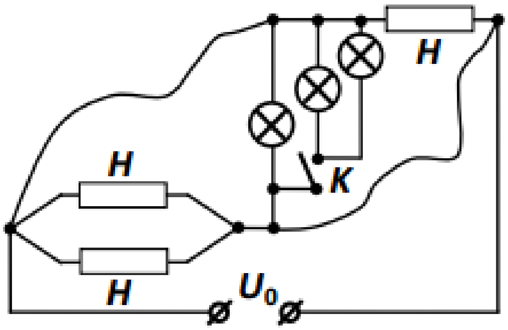
Мы обнаруживаем, что такая точка есть на отрезке 3-1, и в ней объем газа $V = V_1$. Значит, это точка 1 – крайняя точка процесса, и условие постоянства направления теплообмена для 3-1 выполнено.

ОТВЕТЫ: i=5, α = arctg(1,4) ≈ 54,5°, $\eta = \frac{1}{13} \approx 7{,}7\%$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Правильно выражены V_2 и V_3 через z и V_1	**1+1=2**
Правильно выражено p_3 через α, z и p_1	**3**
Получена формула для работы, эквивалентная $A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{p_1 V_1}{4}\mathrm{tg}(\alpha)z^2$	**2**
Правильно проведен анализ возможности $Q_{31} < 0$	**2**
Для $Q_{31} > 0$ получена правильная формула для КПД через α, z и i	**3**
Правильно найдено i=5	**2**
Правильно найден α = arctg(1,4) ≈ 54,5°	**2**
Правильно найден КПД при $z = 1$	**2**
Проведена проверка постоянства направления теплообмена в процессе 3-1	**2**
ВСЕГО	**20**

3. («**Тепло и свет**», 15 баллов) В полевой лаборатории три одинаковых нагревательных элемента с постоянным сопротивлением и три лампы работали от одного генератора, поддерживающего на своих клеммах постоянное напряжение. В схеме электропитания использованы два длинных провода с заметным сопротивлением (на рисунке они показаны «кривыми» линиями). Сопротивления остальных соединительных проводов по сравнению с ними пренебрежимо малы. В первом режиме работы схемы ключ К разомкнут, работает только одна лампа, одиночный нагреватель потребляет мощность $P_1 = 980$ Вт, а каждый из нагревателей в паре – $P_2 = 720$ Вт. Затем ключ К замкнули, и теперь светят все три лампы. При этом мощность потребления каждого из



парных нагревателей уменьшилась до $P_2' = 648$ Вт. Какую мощность P_1' теперь потребляет одиночный нагреватель?

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Обозначим R – сопротивление «первого» длинного провода (расположенного на схеме «слева»), $k{\cdot}R$ – сопротивление «второго» («справа»), $x{\cdot}R$ – сопротивление одного нагревателя, и $y{\cdot}R$ – сопротивление нити одной лампы. Тогда, вычисляя сумму напряжений по «верхнему берегу» нашего моста, получаем: $I_1R + I_HxR = U_0$ (I_H – сила тока через «одиночный» нагреватель). Введя обозначение $I_0 \equiv \dfrac{U_0}{R}$, мы можем переписать это соотношение в виде уравнения

$$I_1 + xI_H = I_0 \qquad \textbf{(3.1)}$$

Аналогично для «нижнего берега» запишем (I_{2H} – сила тока через пару нагревателей)

$$kI_2 + \frac{x}{2}I_{2H} = I_0 \qquad \textbf{(3.2)}$$

Еще два независимых уравнения дают условия непрерывности общего тока

$$I_1 + I_{2H} = I_2 + I_H \qquad \textbf{(3.3)}$$

и закона Ома для лампы (первый случай)

$$\frac{x}{2}I_{2H} - I_1 = y(I_1 - I_H) \Rightarrow \frac{x}{2}I_{2H} + yI_H = (1+y)I_1 \qquad \textbf{(3.4)}.$$

Эту систему линейных уравнений можно решить относительно сил токов. В частности, для сил токов через нагревательные элементы

$$I_H = I_0\,\frac{x(k+y) + 2k(1+y)}{kx(1+x) + (x+2k)[y + x(1+y)]}$$

$$I_{2H} = I_0\,\frac{2[k + y + x(1+y)]}{kx(1+x) + (x+2k)[y + x(1+y)]}$$

Отношение этих токов нам известно, ведь $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{49}{36} = \dfrac{I_H^2}{(I_{2H}/2)^2} \Rightarrow \dfrac{I_H}{I_{2H}} = \dfrac{7}{12}$. Это соотношение дает уравнение на *k*, *x* и *y*: $x = \dfrac{5k + (12k-7)y}{7 - 6k + y}$. Ясно, что для второго случая (одна лампа заменена на параллельное соединение трех) получаются точно такие же формулы с заменой $y \to \dfrac{y}{3}$. Тогда соотношение P_2 к P_2' дает нам еще одно уравнение: $\dfrac{P_2}{P_2'} = \dfrac{10}{9} = \dfrac{I_{2H}^2}{I_{2H}'^2} \Rightarrow \dfrac{I_{2H}}{I_{2H}'} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ или

$$\frac{\sqrt{10}}{3}\,\frac{3(k+x) + (1+x)y}{(k+x) + (1+x)y} = \frac{3kx(1+x) + 3x(x+2k) + (x+2k)(x+1)y}{kx(1+x) + x(x+2k) + (x+2k)(x+1)y}.$$

Этот путь позволяет найти *x* и *y* для каждого *k*, и при этом исследовать диапазон значений *k*, при которых решение является физически допустимым (отношения сопротивлений положительны и близки по порядку величины). Например, при $k = 1$ получается $x = 5$, $y \approx 0{,}3015$. Для каждого полученного корня можно вычислить $\dfrac{P_1'}{P_2'} = \dfrac{I_H'^2}{(I_{2H}'/2)^2} = \left(\dfrac{x(3k+y) + 2k(3+y)}{3k + y + x(3+y)}\right)^2$, и найти P_1'. Отметим, что это очень неудобный путь, так как полученная система после исключения любой пары неизвестных приводят к уравнениям высокой степени, не позволяющих решить ее аналитически. Так что для участников, которые пошли этим путем, практически единственной возможностью являлось численное решение (например, с помощью таблиц Excel или специализированных математических программ). Такой подход приводил к выводу, что возможные значения мощности потребления одиночного нагревателя во втором случае лежат в диапазоне $855\,\text{Вт} < P_1' < 909\,\text{Вт}$.

Впрочем, есть еще один возможный путь. Если *предположить*, что задача должна иметь достаточно простое решение, то можно искать вариант, в котором выражение для отношения сил токов существенно упрощается. Известно, что это происходит в случае «пропорционального моста», когда сопротивление двух «длинных» проводов одинаково (в наших обозначениях $k=1$). Действительно, в этом случае из (3.1) и (3.2) можно получить уравнение $I_1 + xI_H = I_2 + \frac{x}{2}I_{2H}$. Вычитая из него (3.3), обнаруживаем, что $(1+x)I_H = \left(1+\frac{x}{2}\right)I_{2H}$. Таким образом, при $k=1$ отношение сил токов через нагреватели $\frac{I_H}{I_{2H}} = \frac{x+2}{2(x+1)}$ не зависит от I_0 и y, и поэтому будет одинаково для обоих подключений! Приравнивая $\frac{x+2}{2(x+1)} = \frac{7}{12}$, можно найти, что $x=5$, а потом получить квадратное уравнение для y с нужным положительным корнем $y \approx 0{,}3015$, но в действительности в этом нет необходимости. Ведь теперь мы знаем, что для второго случая тоже $\frac{I_H'}{I_{2H}'} = \frac{7}{12}$, и $\frac{P_1'}{P_2'} = \frac{49}{36} \Rightarrow P_1' = \frac{49}{36}P_2' = 882$ Вт. Такой подход использовался частью участников, и считался «почти» правильным решением (см. критерии проверки)

ОТВЕТ: $855\,\text{Вт} < P_1' < 909\,\text{Вт}$; допустимый ответ: $P_1' = \frac{P_1}{P_2}P_2' = 882$ Вт.

Примечание: Обращаем внимание участников, что эта задача – по физике, а не по математике, хоть она и требует значительного объема математической работы. В реальных исследованиях законов природы мы часто начинаем с ситуации, когда нам неизвестна часть параметров реалистичной модели явления, и в этом случае именно анализ возможных значений «недостающих» величин позволяет спланировать эксперименты для их определения. Поэтому в научном исследовании недостаточность количества уравнений для однозначного решения задачи – не повод останавливаться. Конечно, на олимпиадах обычно стараются давать задачи, в которых такого не бывает. Но это творческая часть задания! Например, литературный персонаж братьев Стругацких, ставший героем одного из наших заданий (Кристобаль Хунта, олимпиада «ПВГ!»-2020), принципиально интересовался только решением тех задач, для которых доказано отсутствие решения.

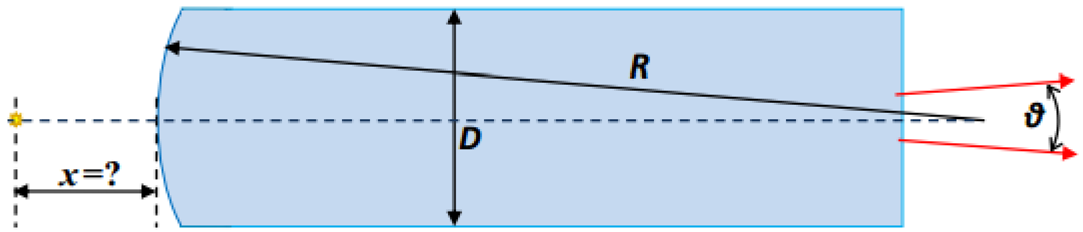
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Получена полная система 4 уравнений связи сил токов с сопротивлениями (эквивалентная (3.1) – (3.4))	**4×1=4**
Вычислено отношение $\frac{I_H}{I_{2H}} = \frac{7}{12}$ либо получено правильное уравнение,	**1**

связывающее $\frac{P_1}{P_2}=\frac{49}{36}$ с сопротивлениями	
Записана полная система уравнений для сопротивлений или их отношений	**2**
Предложен алгоритм анализа системы уравнений **ИЛИ** Указано, что при $k=1$ связь сил токов через нагреватели оказывается максимально простой	**3***
Получена верная формула для $\frac{P_1'}{P_2'}$ в выбранном методе	**2**
Получен ответ $855\,\text{Вт} < P_1' < 909\,\text{Вт}$ (получен ответ $P_1' = (882 \pm 1)$ Вт или другой правильный ответ для одного допустимого значения k)	**3 (2)**
ВСЕГО	**15**

*Если случай $k=1$ выбран без анализа общего случая, то при правильном решении за пункт 1 ставится **2 балла** (2 уравнения), за пункт 2 – **полный балл**, за пункт 3 ставится **1 балл**, за пункты 4 и 5 – **полный балл**, за пункт 6 – **2 балла**. Таким образом, максимальная оценка за этот вариант решения равна **11 баллам**.

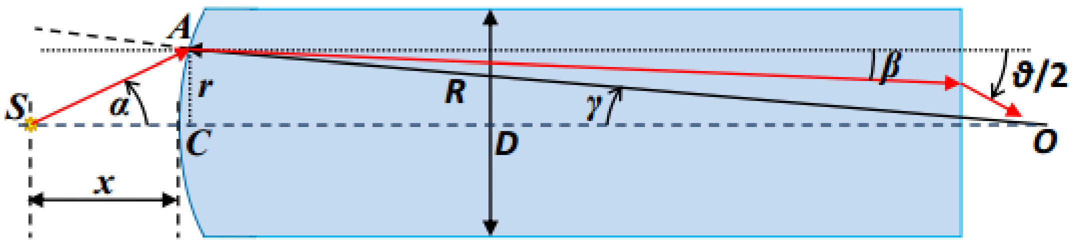
4. («**Очень толстая линза**», 20 баллов) В некоторой установке использовался пучок параллельных лучей с очень маленькой расходимостью – максимальный угол между двумя лучами в этом пучке не должен был превышать $\vartheta_{max} = 0{,}1°$. Для создания такого пучка использовались яркий монохроматический сферический источник света с диаметром $d = 4$ мкм и *коллиматор* – цилиндр диаметром $D = 10$ см из стекла с показателем преломления $n = 2$, один торец которого тщательно отшлифован в форме сферической поверхности радиусом $R = 50$ см, центр кривизны которой лежит на оси цилиндра (см. рисунок). На каком расстоянии x от вершины этой поверхности нужно разместить источник, чтобы его лучи, прошедшие через коллиматор, образовали пучок с требуемыми характеристиками?



Указание: Учтите, что при $\alpha << 1$ справедливы приближенные равенства $\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ и $\text{tg}(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ с ошибкой менее $\frac{\alpha^5}{5}$. Источник света в рамках требуемой точности можно считать точечным.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Сразу отметим, что размеры источника крайне малы и их влиянием на ход лучей можно пренебрегать ($\frac{d}{D} = 4 \cdot 10^{-5}$, и даже для «крайних» лучей влияние размеров источника на угол наклона луча к оси менее 0,001°). Введем обозначения: пусть α – угол наклона к оси системы луча от источника, падающего на сферическую поверхность в точке A на расстоянии r от оси.



Угол отклонения преломленного луча от оси обозначим β, а угол между осью системы и радиусом сферической поверхности, проведенным в точку А, назовем γ. В качестве переменной, описывающей положение точки А, будем использовать $y \equiv \sin(\gamma) = \frac{r}{R}$. Как видно, область изменения этой переменной $0 \le y \le \frac{D}{2R} = 0{,}1 << 1$. Закон преломления луча в точке А дает связь углов β и α:

$$\sin(\alpha+\gamma) = n \cdot \sin(\gamma-\beta) \Rightarrow \sin(\alpha)\sqrt{1-y^2} + y\cos(\alpha) = 2y\cos(\beta) - 2\sin(\beta)\sqrt{1-y^2}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Искомое расстояние x связано с углом α:

$$x = r \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) - R[1-\cos(\gamma)] = R[y \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) - 1 + \sqrt{1-y^2}]. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Отметим, что отражение лучей от боковой цилиндрической поверхности коллиматора не изменяет модуля β, и к тому же для получающихся углов здесь происходит полное внутреннее отражение, так что и на яркость лучей эти отражения не влияют. В дальнейшем мы не будем обращать на них внимания. Так как ограничение на угол $\vartheta = \arcsin[n \cdot \sin(\beta)]$ очень жесткое, то и углы β должны быть крайне малы, и с высокой точностью можно считать, что $\frac{\vartheta}{2} = n|\beta| \Rightarrow |\beta| \le \frac{\vartheta_{\max}}{4} = 0{,}025° \approx 0{,}00044$. Однако аналитически выразить β через и из полученных трансцендентных уравнений не получится. Поэтому тут возможны два пути:

I. Выразить $\beta(x,y)$ из (4.1) и (4.2), пользуясь малостью y. При этом сразу необходимо понять, что слагаемые порядка $y^3 \le 10^{-3}$ <u>существенны</u> в требуемом масштабе точности вычислений, и их необходимо сохранять (пренебрегать мы можем только слагаемыми порядка $y^5 \le 10^{-5}$ и меньше). В этом случае из (4.2) с учетом $1-\sqrt{1-y^2} \approx \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}$ находим: $\mathrm{tg}(\alpha) \approx \frac{y}{z + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}}$, где $z \equiv \frac{x}{R}$. Записав $\alpha \approx a_1 y + a_3 y^3$, и используя разложение для тангенса, находим, приравнивая слагаемые с одинаковой степенью: $a_1 = \frac{1}{z}$ и $a_3 = -\frac{3z+2}{6z^3}$.

Таким образом, с точностью до поправок порядка y^5 угол $\alpha \approx \frac{y}{z} - \frac{3z+2}{6z^3}y^3$. Аналогично в (4.1) записываем $\beta \approx b_1 y + b_3 y^3$, и снова используем разложения для синуса и косинуса ($\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha)} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$): $b_1 = \frac{z-1}{2z}$ и $b_3 = +\frac{7z^3+9z^2+21z+11}{48z^3}$. Таким образом,

$$\beta(y,z) \approx \frac{z-1}{2z}y + \frac{7z^3+9z^2+21z+11}{48z^3}y^3.$$

Мы обнаружили, что в порядке y^1 при $z=1$ (то есть для случая $x=R$, когда источник располагается в фокусе сферической поверхности, рассчитанном в параксиальном приближении – например, по формуле оптической силы тонкой линзы) мы получаем, что все лучи в коллиматоре идут параллельно оси. Однако при учете поправок порядка y^3 для луча с максимальным отклонением ($y=0{,}1$) от оси $\beta(0{,}1{,}1)\approx 0{,}001>0{,}00044$. Это означает, что при таком положении источника пучок имеет слишком большую расходимость! Как видно, на самом деле лучше взять z немного меньше 1, и в этом случае $\beta_{\max}$ будет меньше. Например, можно выбрать его так, чтобы при $y=0{,}1$ угол отклонения β обращался в ноль (это соответствует $z\approx 0{,}980$ или $x\approx 490\,\text{мм}$), и этот выбор отвечает $\beta_{\max}\approx 0{,}00041$, то есть пучок удовлетворяет введенным требованиям. Более подробное исследование показывает, что пучок удовлетворяет требованиям при $0{,}979\le z\le 0{,}988$ (то есть $489{,}5\,\text{мм}\le x\le 494\,\text{мм}$), а наименьшая расходимость пучка достигается при $z\approx 0{,}984$ ($x\approx 492\,\text{мм}$).

II. Можно догадаться, что наиболее критичная область – область углов, близких к максимальному отклонению ($y\approx 0{,}1$), и можно выбирать положение источника таким образом, чтобы $\beta=0$ при определенном значении y, например – именно при $y=0{,}1$. Такой подбор можно осуществить непосредственно на базе формул (3.1) и (3.2): положив в (3.1) $\beta=0$, находим, что $\sin(\alpha)\sqrt{1-y^2}+y\cos(\alpha)=2y\Rightarrow\alpha=\arcsin[2\sin(\gamma)]-\gamma$.Подставив это значение в (3.2), находим, что $x=R\left[\dfrac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-4y^2}+2y^2}{2\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-4y^2}}-1+\sqrt{1-y^2}\right]$. Тогда для $y=0{,}1$ получается $x\approx 0{,}97985\cdot R\approx 489{,}9\,\text{мм}$. Как видно, этот метод дает разумный результат и намного проще по расчетам, но он менее строг: отсутствие аналитической формулы для β не позволяет провести анализ угла отклонения на максимум, и мы опираемся на «догадку» о том, что нужно минимизировать отклонение «крайних» преломленных лучей от оси.

III. Можно модифицировать «второй» метод, проведя численный анализ значений угла отклонения на максимум во всем возможном интервале точек падения (на основе формул (3.1) и (3.2) или в рамках корректного эквивалентного подхода). В этом случае – при четком объяснении процедуры и представлении результатов расчета для разных значений x и разных точек падения – такой метод решения становится строгим, и он засчитывался наравне с «первым».

ОТВЕТ: $x\approx(492\pm 2)\,\text{мм}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Указано (используется в решении), что размерами источника можно пренебречь	**1**
Указано (используется в решении), что отражения от боковой поверхности не влияют на результат	**1**
Правильно записан закон преломления на сферической поверхности (3.1)	**3**
Правильно записано уравнение, эквивалентное (3.2)	**2**
Обосновано, что в разложении по малому параметру нужно учитывать слагаемые с относительной величиной до 10^{-3} / Объяснено, что нужно минимизировать отклонение «крайних» лучей от оси	**3 / 2***

Получено выражение для $\beta(y,z)$ в нужном порядке / найдено выражение для x, при котором крайний луч не отклоняется	**5 / 3***
Ответ для x в виде диапазона (492 ± 2) мм / ответ в виде числа в диапазоне (492 ± 3) мм / только в диапазоне (492 ± 5) мм	**3/2/1**
Проведен анализ отклонения на максимум для всех точек падения	**2***
ВСЕГО	**20**

*При решении «вторым» методом вообще без анализа отклонений на максимум во всем возможном интервале точек падения максимальная оценка равна **16 баллам**, если также нет объяснения, почему выбран крайний луч, то **15 баллам**.

Примечание: Как видно из приведенного решения, использование формулы тонкой линзы или «формулы шлифовальщика» при заданном требованию к *коллинеарности* (малой расходимости) пучка является слишком грубым, так как при их выводе в выражениях для синусов и тангенсов углов пренебрегают упомянутыми в условии кубическими поправками. Поэтому практически любое решение на основе этих формул оказывается по сути неверным. Кроме того, ясно, что в рамках параксиального приближения корректные вычисления обязательно должны привести нас к ответу $x = 500$ мм. В ходе проверки жюри обнаружило много (более 100) работ с решениями, приводящими к ответу $x \geq 504$ мм (или аналогичному со «сдвигом» запятой). Жюри просит участников в дальнейшем быть более внимательными. Эти решения не только получены в рамках некорректного для данной задачи приближения с помощью вычислений, содержащих неточности, но и имеют физически бессмысленный ответ (из него, например, следует, что для лучи от удаленного ($x \to \infty$) источника, находящегося на главной оптической оси линзы, после прохождении линзы идут практически параллельно этой оси, а это очевидно не так!). Поэтому такие решения считались <u>полностью</u> неправильными.