Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2021/2022 учебного года

Вариант 10-1

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 12, 13, 14, 15, 16, 17, …, если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $16=4^2$, $25=5^2$, $27=3^3$, …)?

2. Решите неравенство $\left(18x^3-9x^2-2x+1\right)\cdot\arccos\left(-2x-1\right)\geq\arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$.

3. Найдите количество натуральных делителей наибольшего целого значения выражения $xyz+xy+yz+zx+2023$, если сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 2022.

4. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $BC=CD=AD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему равна площадь этого четырёхугольника?

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3+2x^2+x-a|+|x^3-2x^2+x+a|<4x^2-8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 2.

Март 2022 г.

Ответы и решения

1. Ответ: 2083. Решение. Среди чисел 1, 2, 3, 4, …, N будет: $[\sqrt{N}]$ чисел, которые являются полными квадратами; $[\sqrt[3]{N}]$ чисел, являющихся полными кубами; и $[\sqrt[6]{N}]$ чисел, из которых извлекается как вторая, так и третья степень (то есть шестая степень).

Поэтому количество чисел в последовательности 1, 2, 3, 4, …, N без полных квадратов и кубов выражается формулой: $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]$. Так как в последовательности 12, 13, 14, …, N таких чисел будет на 7 меньше (это числа 2, 3, 5, 6, 7, 10 и 11), то решаем уравнение

$$N-\left[\sqrt{N}\right]-\left[\sqrt[3]{N}\right]+\left[\sqrt[6]{N}\right]-7=2022.$$

а) Если $N<2025=45^2$, то $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]<2025-45-([\sqrt[3]{N}]-[\sqrt[6]{N}])\le 2025-45<2025$.

б) Если $45^2=2025\le N<2116=46^2$, то $2197=13^3>N>12^3=1728$ и $4096=4^6>N>3^6=729$.

Значит, $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]=N-45-12+3=N-54$. Тогда из уравнения $N-54=2029$ получаем ответ N = 2083.

2. Ответ: $x\in\{-1\}\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]$. Решение. Так как $\frac{1}{4\sin 50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}=\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}$

$=\dfrac{\sin 30^\circ\cdot\sin 40^\circ+\cos 30^\circ\cdot\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\dfrac{\cos(40^\circ-30^\circ)}{\sin 80^\circ}=\dfrac{\cos(10^\circ)}{\sin(90^\circ-10^\circ)}=1$, то получается неравенство

$$(18x^3-9x^2-2x+1)\cdot\arccos(-2x-1)\ge 0.$$

Левая его часть определена при $|-2x-1|\le 1$, поэтому $x\in[-1;\ 0]$. На этом отрезке первый сомножитель $(18x^3-9x^2-2x+1)=(2x-1)(3x-1)(3x+1)$ неотрицателен при $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$ и отрицателен при $x\in[-1;\ -\frac{1}{3})$. Второй сомножитель всегда неотрицателен и равен нулю при $x=-1$.

Поэтому $x\in\{-1\}\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]$.

3. Ответ: 70. Решение. Так как $xyz + xy + yz + zx + 2023 = (x+1)(y+1)(z+1) - x - y - z - 1 + 2023 = (x+1)(y+1)(z+1) - 2022 - 1 + 2023 = (x+1)(y+1)(z+1) \leq \left(\frac{x+1+y+1+z+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2022+3}{3}\right)^3 = 675^3$, то наибольшее целое значение выражения равно $675^3 = 3^9 \cdot 5^6$ и имеет $(9+1)(6+1) = 70$ натуральных делителей. Равенство достигается при $x = y = z = \frac{2022}{3} = 674$.

4. Ответ: $\dfrac{27\sqrt{7}}{4}$. Решение. Так как хорды *AB* и *CD* равны, то равны и дуги *AB* и *CD*, а значит, равны вписанные углы *CAD* и *BCA*. Это означает, что *BC* || *AD*, и *ABCD* – трапеция с равными боковыми сторонами *AB* и *CD*. Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = b$, $AC = BD = c$. Высоту $h = BH$ выразим по теореме Пифагора $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, после чего $c^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab$. Заметим, что это же можно было получить с помощью теоремы Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Leftrightarrow$ $a^2 + ab = c^2$.

Таким образом, $c^2 = a(a+b)$, где *a, b, c* – натуральные числа. Кроме того, $3a > b$, то есть $b \leq 3a - 1$.

Если $a = 1$, то $b \in [1;\, 2]$, и уравнение $c^2 = 1(1+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 2$, то $b \in [1;\, 5]$, и уравнение $c^2 = 2(2+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 3$, то $b \in [1;\, 8]$, и уравнение $c^2 = 3(3+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 4$, то $b \in [1;\, 11]$, и уравнение $c^2 = 4(4+b)$ имеет единственное целое решение $b = 5$, $c = 6$. Тогда периметр равен $3a + b = 17$.

При $a \geq 5$ периметр будет больше 17, так как если $3a + b \leq 17$, то $a = 5$. Но тогда или $b = 1$, $c^2 = 30$, или $b = 2$, $c^2 = 35$ – то и другое невозможно.

Итак, $AB = BC = CD = 4$, $AD = 5$, $AC = BD = 6$, периметр равен 17. Тогда высота трапеции равна $\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$, и площадь трапеции равна $\frac{4+5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{27\sqrt{7}}{4}$.

5. Ответ: $a = -4,\ 8$. Решение. В силу представления

$$|a| + |b| = \max|a \pm b| = \max\{\pm(a+b), \pm(a-b)\},$$

исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 - 8x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 - 8x \\ 4x^2 - 2a < 4x^2 - 8x \\ -4x^2 + 2a < 4x^2 - 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2\mathrm{x} + 5) < 0 \\ x(x+3)(x-1) > 0 \\ x < \dfrac{a}{4} \\ (2x-1)^2 - a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 0 \\ x < \dfrac{a}{4} \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 > \dfrac{a+1}{4}. \end{cases}$$

А. Если $a < -1$, то $a + 1 < 0$ и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -4\ (< -1).$$

Б. Если $a \geq -1$, то $\frac{a}{4} > -1$ и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{a+1}{4}} = -1 \Leftrightarrow a = 8\ (\geq -1).$$