Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2021/2022 учебного года

Вариант 11-1

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 6, 7, 8, 9, 10, …, если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $8=2^3$, $9=3^2$, $16=4^2$, …)?

2. Решите неравенство $\left(8x^3+4x^2-18x-9\right)\cdot\arccos\left(x-1\right)\le\arccos\left(\dfrac{1}{4\cos 40^\circ}+\dfrac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$.

3. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник *ABCD* с наименьшим периметром, в котором $AB=BC=CD$ и все попарные расстояния между точками *A*, *B*, *C* и *D* выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг *ABCD* окружности?

4. Последовательность a_n задана формулами $a_1=\frac{4043}{2022}$, $a_{n+1}=a_n^3-3a_n^2+3a_n$. Найдется ли натуральное число *n* такое, что $|a_n|\le\frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

5. В треугольной пирамиде *SABC* в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AC*. Боковые грани *SAB* и *SAC* перпендикулярны плоскости *ABC*. Сфера радиусом, равным *AC*, с центром в точке *S* делит пирамиду на две части. Найдите объём большей из этих частей, если *SA* = *AB* = 2.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a|<4x^2+8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 1.

Март 2022 г.

Ответы и решения

1. Ответ: 2079. Решение. Среди чисел 1, 2, 3, 4, …, N будет: $[\sqrt{N}]$ чисел, которые являются полными квадратами; $[\sqrt[3]{N}]$ чисел, являющихся полными кубами; и $[\sqrt[6]{N}]$ чисел, из которых извлекается как вторая, так и третья степень (то есть шестая степень).

Поэтому количество чисел в последовательности 1, 2, 3, 4, …, N без полных квадратов и кубов выражается формулой: $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]$. Так как в последовательности 6, 7, 8, …, N таких чисел будет на 3 меньше (это числа 2, 3 и 5), то решаем уравнение

$$N-\left[\sqrt{N}\right]-\left[\sqrt[3]{N}\right]+\left[\sqrt[6]{N}\right]-3=2022.$$

а) Если $N<2025=45^2$, то $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]<2025-45-([\sqrt[3]{N}]-[\sqrt[6]{N}])\leq 2025-45<2025.$

б) Если $45^2=2025\leq N<2116=46^2$, то $2197=13^3>N>12^3=1728$ и $4096=4^6>N>3^6=729$.

Значит, $N-[\sqrt{N}]-[\sqrt[3]{N}]+[\sqrt[6]{N}]=N-45-12+3=N-54$. Тогда из уравнения $N-54=2025$ получаем ответ N = 2079.

2. Ответ: $x\in\left[0;\frac{3}{2}\right]\cup\{2\}$. Решение. Так как $\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}=\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}$ $=\frac{\sin 30^\circ\cdot\sin 40^\circ+\cos 30^\circ\cdot\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos(40^\circ-30^\circ)}{\sin 80^\circ}=\frac{\cos(10^\circ)}{\sin(90^\circ-10^\circ)}=1$, то получается неравенство

$$\left(8x^3+4x^2-18x-9\right)\cdot\arccos(x-1)\leq 0.$$

Левая его часть определена при $|x-1|\leq 1$, поэтому $x\in[0;2]$. На этом отрезке первый сомножитель $\left(8x^3+4x^2-18x-9\right)=(2x+1)(2x-3)(2x+3)$ неотрицателен при $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ и отрицателен при $x\in\left[0;\frac{3}{2}\right)$. Второй сомножитель всегда неотрицателен и равен нулю при x = 2.

Поэтому $x\in\left[0;\frac{3}{2}\right]\cup\{2\}$.

3. Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$. Решение. Так как хорды *AB* и *CD* равны, то равны и дуги *AB* и *CD*, а значит, равны вписанные углы *CAD* и *BCA*. Это означает, что *BC* || *AD*, и *ABCD* – трапеция с равными боковыми сторонами *AB* и *CD*. Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = b$, $AC = BD = c$. Высоту $h = BH$ выразим по теореме Пифагора $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, после чего $c^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab$. Заметим, что это же можно было получить с помощью теоремы Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Leftrightarrow$ $a^2 + ab = c^2$.

Таким образом, $c^2 = a(a+b)$, где *a, b, c* – натуральные числа. Кроме того, $3a > b$, то есть $b \le 3a - 1$.

Если $a = 1$, то $b \in [1; 2]$, и уравнение $c^2 = 1(1+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 2$, то $b \in [1; 5]$, и уравнение $c^2 = 2(2+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 3$, то $b \in [1; 8]$, и уравнение $c^2 = 3(3+b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 4$, то $b \in [1; 11]$, и уравнение $c^2 = 4(4+b)$ имеет единственное целое решение $b = 5$, $c = 6$. Тогда периметр равен $3a + b = 17$.

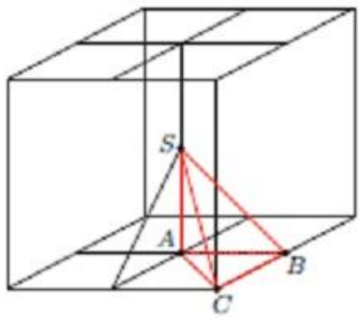
При $a \ge 5$ периметр будет больше 17, так как если $3a + b \le 17$, то $a = 5$. Но тогда или $b = 1$, $c^2 = 30$, или $b = 2$, $c^2 = 35$ – то и другое невозможно.

Итак, $AB = BC = CD = 4$, $AD = 5$, $AC = BD = 6$, периметр равен 17. Тогда высота трапеции равна $\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$, синус угла при основании равен $\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{2 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, а искомый радиус находится по теореме синусов $2R = \frac{BD}{\sin A} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}$.

4. Ответ: Да. Решение. Переписав данную в условии формулу в виде $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$, находим, что если $a_n = 1 + \varepsilon$, то $a_{n+1} = 1 + \varepsilon^3$. В предложенной задаче $a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$, поэтому $a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3, \ldots, a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$.

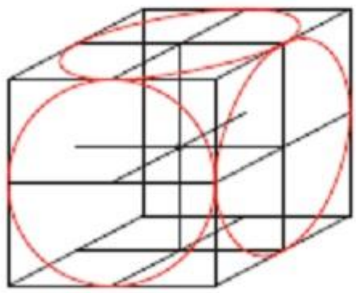
Так как $a_n \le \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le \frac{1}{2021}$. Это неравенство при достаточно больших n выполняется. Для того, чтобы это утверждать, нужно или доказать, что предел этой последовательности равен 0, или сделать оценку $3^{n-1} \ge \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right) \Leftrightarrow n \ge 1 + \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}\right)$, откуда следует, что для любого $n \ge \left[1 + \log_3\left(\log_{\frac{2022}{2021}} 2021\right)\right] + 1$ неравенство выполняется.

5. Ответ: $\dfrac{\pi\left(15 - 8\sqrt{2}\right)}{9}$. Решение. Из условия задачи вытекает, что ребро SA пирамиды перпендикулярно основанию ABC.



Обозначим $SA = AB = a$. Пирамида $SABCD$ является 1/48 частью изображённого на рисунке куба с ребром $2a$, причём все 48 пирамид, образующих этот куб, располагаются центрально-симметрично относительно общей вершины S.

Поэтому искомый объём есть 1/48 объёма тела, представляющего собой пересечение шара радиуса $R = \sqrt{2}a$ и данного куба. Это пересечение есть шар без шести шаровых сегментов с высотой шарового сегмента $h = (\sqrt{2} - 1)a$ (см. рисунок).



Объём этого тела: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}a^3 - 6\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)^2\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{3}\right)a^3$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3 - 2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2} + 1\right)\pi a^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi a^3\left(4\sqrt{2} - 3\left(4\sqrt{2} - 5\right)\right) = \frac{2}{3}\cdot\pi a^3\left(15 - 8\sqrt{2}\right).$$

Значит, искомый объём равен $\frac{2}{3\cdot 48}\cdot\pi a^3\left(15-8\sqrt{2}\right)=\frac{\pi a^3\left(15-8\sqrt{2}\right)}{72}=\frac{\pi\left(15-8\sqrt{2}\right)}{9}$.

Отметим, что объём всей пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 2=\frac{4}{3}$ (или, что то же самое, 1/48 части куба, то есть $\frac{4^3}{48}=\frac{4}{3}$). Найденный объём части пирамиды больше, чем 1/2 объема пирамиды, так как $\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow 15-8\sqrt{2}>\frac{6}{\pi}\Leftrightarrow 15-8\sqrt{2}>15-12=3>\frac{6}{\pi}$. Это подтверждает, что мы нашли именно объём большей части пирамиды.

6. Ответ: $a=-24,\ 8$. Решение. В силу того, что

$$|u|+|v|=\max|\mathrm{u}\pm v|=\max\ \{u+v,-u-v,u-v,-u+v\},$$

исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^3+2x<4x^2+8x \\ -2x^3-2x<4x^2+8x \\ 4x^2+2a<4x^2+8x \\ -4x^2-2a<4x^2+8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1)<0 \\ x(x^2+2x+5)>0 \\ x>\frac{a}{4} \\ (2x+1)^2+a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3 \\ x>\frac{a}{4} \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1-a}{4} \end{cases}.$$

А. Если $a>1$, то $1-a<0$, третье неравенство выполнено, и требуемое условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{4}=2\Leftrightarrow a=8\ (>1).$$

Б. Если $a\le 1$, то $\frac{a}{4}<2$, и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\frac{1-a}{4}}-\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow a=-24\ (\le 1).$$