ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2020 года

БИЛЕТ № 05 (11 класс): возможные решения и критерии.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

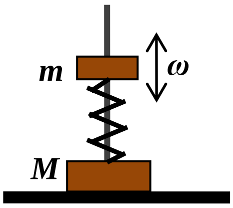
Задание 1.

Вопрос: Как связаны между собой законы изменения координаты и ускорения тела, совершающего гармонические колебания вдоль одной прямой?

Ответ: Гармонические колебания – это колебания по закону синуса или косинуса, и закон движения при гармонических колебаниях в общем случае можно записать в виде $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \equiv x_m \cos(\omega t + \varphi)$. Здесь $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ циклическая частота колебаний, связанная с периодом T, x_m – амплитуда (максимальное отклонение от положения равновесия, от которого отсчитывается координата x), а φ – начальная фаза колебаний. Дважды дифференцируя это соотношение, находим закон изменения ускорения тела: $a_x(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$. Как видно, этот закон можно записать в виде

$a_x(t) = a_m \cos(\omega t + \varphi_a)$, где $a_m = \omega^2 x_m$ и $\varphi_a = \varphi + \pi$. Значит, амплитуда колебаний ускорения пропорциональна амплитуде смещения от положения равновесия, а фаза колебаний ускорения отличается от фазы колебаний смещения на π.

Задача: Две шайбы с массами m и $M = 2m$ насажены на гладкий закрепленный вертикально стержень и соединены пружиной, как показано на рисунке. Тело массы M опирается на горизонтальную поверхность, а тело массы m совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A. Пружина невесома. Найдите отношение наибольшей $F_{\max}$ и наименьшей $F_{\min}$ сил давления системы на плоскость стола. Ускорение свободного падения равно g.



Решение: Ясно, что сила давления системы на плоскость (равная по величине силе реакции плоскости) максимальна в тот момент, когда пружина максимально сжата и верхняя шайба находится в нижнем положении с амплитудным отклонением. Запишем для этого момента второй закон Ньютона для верхней шайбы и условие баланса сил для нижней в проекцию на координатную ось, направленную вертикально вверх:

$$\left\{\begin{matrix} m\omega^2 A = -k\Delta l_{\min} - mg \\ N_{\max} + k\Delta l_{\min} - Mg = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow N_{\max} = (M+m)g + m\omega^2 A.$$

Здесь учтено, что ускорение при гармонических колебаниях направлено противоположно смещению, а амплитуда ускорения связана с амплитудой смещения соотношением $a_m = A\omega^2$.

Аналогично эта сила минимальна, когда верхняя шайба находится в точке верхнего амплитудного отклонения. В этом случае

$$\left\{\begin{matrix} -m\omega^2 A = -k\Delta l_{\max} - mg \\ N_{\min} + k\Delta l_{\max} - Mg = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow N_{\min} = (M+m)g - m\omega^2 A.$$

Таким образом, $\dfrac{F_{\max}}{F_{\min}} = \dfrac{N_{\max}}{N_{\min}} = \dfrac{(M+m)g + mA\omega^2}{(M+m)g - mA\omega^2} = \dfrac{3g + \omega^2 A}{3g - \omega^2 A}$. Отметим, что знак $\Delta l_{\max}$ не обязательно положителен – даже в верхней точке пружина (при малых амплитудах колебания) может быть сжата, но в записанной форме уравнения справедливы в любом случае). Кроме того, ясно, что этот ответ является корректным только если $A < \dfrac{(m+M)g}{m\omega^2} = \dfrac{3g}{\omega^2}$ (это условие отсутствия отрыва нижней шайбы от опоры в процессе колебаний).

ОТВЕТ: $\dfrac{F_{\max}}{F_{\min}} = \dfrac{3g + \omega^2 A}{3g - \omega^2 A}$ при $A < \dfrac{3g}{\omega^2}$, при $A > \dfrac{3g}{\omega^2}$ происходит отрыв нижней шайбы от плоскости.

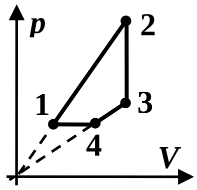
Задание 2.

Вопрос: Пусть уравнение процесса с одноатомным идеальным газом $p = \alpha \cdot V$ ($\alpha = const$). Как в этом процессе связаны работа газа и сообщаемое ему количество теплоты?

Ответ: Работу газа в таком процессе 1-2 можно вычислить как площадь под диаграммой процесса, то есть как площадь трапеции: $A_{12} = \dfrac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. С учетом уравнения процесса и уравнения Менделеева-Клапейрона $\nu RT = pV = \alpha \cdot V^2$, и поэтому $A_{12} = \dfrac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \dfrac{\nu R}{2}(T_2 - T_1)$. Изменение внутренней энергии газа в этом процессе

$\Delta U_{12} = \frac{3\nu R}{2}(T_2 - T_1) = 3A_{12}$. Таким образом, $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 4A_{12}$. Количество теплоты равно учетверенной работе.

Задача: На диаграмме в координатах давление-объем показан цикл постоянного количества одноатомного идеального газа, являющегося рабочим телом тепловой машины. Цикл состоит из изохоры, изобары и двух процессов, линии которых на диаграмме – прямые, проходящие через начало координат. Температура в точке 4 в $k = 1{,}5$ раза, а в точке 3 – в $n = 6$ раз больше, чем минимальная температура газа в цикле. Во сколько раз максимальная температура в цикле больше минимальной? Найдите КПД этого цикла.



Решение: Ясно, что минимальная температура в цикле – это температура T_1. Из ответа на вопрос видно, что в процессах с давлением, пропорциональным объему, температура растет пропорционально квадрату объема, поэтому максимальная температура $T_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 T_1$. С другой стороны, $V_2 = V_3 = \sqrt{\frac{n}{k}} V_4 = \sqrt{nk} V_1$. Следовательно, $\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{T_2}{T_1} = nk = 9$. Тепло подводится к газу только в процессе 1-2, так что количество теплоты нагревателя $Q_H = 4A_{12} = 2\nu R(T_2 - T_1) = 2(nk-1)\cdot \nu RT_1$. Полезная работа может быть вычислена как площадь цикла: $A = \frac{1}{2}[(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) - (p_3 - p_4)(V_3 - V_4)]$. С учетом того, что $p_2 = \sqrt{nk}\, p_1$, $V_2 = \sqrt{nk} V_1$, $p_3 = \sqrt{\frac{n}{k}}\, p_1$, $V_3 = \sqrt{nk} V_1$, $p_4 = p_1$ и $V_4 = kV_1$, находим: $A = \frac{(n-1)(k-1)}{2} p_1 V_1 = \frac{(n-1)(k-1)}{2} \nu RT_1$. Значит, КПД данного цикла $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{(n-1)(k-1)}{4(nk-1)} = \frac{5}{64} \approx 7{,}8\%$.

ОТВЕТ: $\frac{T_{max}}{T_{min}} = nk = 9$, $\eta = \frac{(n-1)(k-1)}{4(nk-1)} = \frac{5}{64} \approx 7{,}8\%$.

Задание 3.

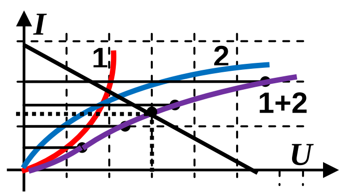
Вопрос: Пусть у нас есть два элемента, у которых зависимость тока от напряжения описывается заданными функциями: $I = f_1(U)$ и $I = f_2(U)$. Как следует вычислять силу тока в цепи из двух этих элементов, подключенных последовательно к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r?

Ответ: Сумма напряжений на элементах должна равняться напряжению на ЭДС:

$$\mathcal{E} - Ir = f_1^{-1}(I) + f_2^{-1}(I). \quad (1)$$

Здесь $U_1 = f_1^{-1}(I)$ и $U_2 = f_2^{-1}(I)$ – функции, обратные к $I = f_1(U)$ и $I = f_2(U)$. Сила тока в цепи – это корень уравнения (1). Если уравнение (1) имеет несколько корней, то необходимо отобрать те, которые являются устойчивыми при небольших флуктуациях силы тока в цепи.

Уравнение (1) также можно решать графически: для этого нужно на графике вольт-амперных характеристик элементов произвести суммирование напряжений при одинаковых значениях тока, а потом найти точку пересечения суммарного графика (вольт-амперной характеристики последовательного соединения элементов) с «нагрузочной прямой источника», определяемой уравнением $U = \mathcal{E} - Ir$.



Задача: Лампы накаливания обычно являются нелинейными элементами электрических цепей – ток в них не пропорционален напряжению. Допустим, у нас есть набор ламп, для которых связь тока и напряжения дается формулой $I(U)=I_0\sqrt{\frac{U}{U_0}}$, где значения I_0 и U_0 соответствуют номинальному режиму. Кроме того, мы можем использовать набор одинаковых батарей с ЭДС $\mathrm{E}=U_0$. Если подключить одну лампу к одной батарее, на лампе будет выделяться мощность $P=\frac{27}{64}P_0$ (P_0 - номинальная мощность). Из какого минимального количества последовательно соединенных ламп надо составить гирлянду, чтобы при подключении ее к некоторому количеству последовательно соединенных батарей все лампы гирлянды работали в точности в номинальном режиме? Сколько батарей нужно будет для этого использовать?

Решение: Рассмотрим одну лампу, подключенную к одной батарее. Напряжение на лампе связано с током через нее $U_0-Ir=U_0\left(\frac{I}{I_0}\right)^2$. С другой стороны, выделяемая на лампе мощность как функция тока через нее $P(I)=U(I)I=U_0I_0\left(\frac{I}{I_0}\right)^3=\frac{27}{64}P_0\Rightarrow I=\frac{3}{4}I_0$. Таким образом, $U_0-\frac{3}{4}I_0r=\frac{9}{16}U_0\Rightarrow r=\frac{7}{12}\frac{U_0}{I_0}$. При подключении гирлянды из n ламп к k батареям все лампы работают в номинальном режиме, если

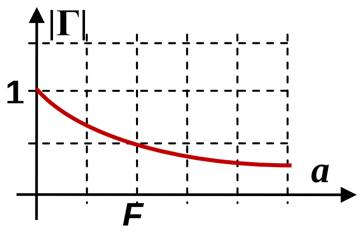
$$k[U_0-I_0r]=nU_0\Rightarrow 5k=12n.$$

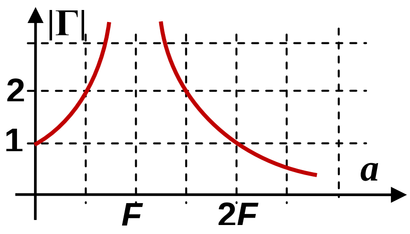
Минимальное целочисленное решение соответствует $n=5$, при $k=12$.
ОТВЕТ: из $n=5$ ламп; нужно будет использовать $k=12$ батарей.

Задание 4.

Вопрос: Как изменяется поперечное увеличение небольшого светящегося предмета в зависимости от расстояния между предметом и линзой?

Ответ: Поперечное увеличение – это увеличение объекта, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Так как для тонкой линзы можно провести лучи, идущие от крайних точек такого предмета через оптический центр линзы, и они пройдут через края изображения, которое так же будет перпендикулярно главной оптической оси, то отношение линейных размеров изображения и предмета (а это и есть величина поперечного увеличения) будет равно отношению расстояний от изображения до линзы $|b|$ и от предмета до линзы $|a|$: $|\Gamma|=\left|\frac{b}{a}\right|$. Для тонких линз справедлива формула линзы, согласно которой $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$, где F – фокусное расстояние линзы. Таким образом, $b=\frac{aF}{a-F}$, и поэтому $|\Gamma|=\left|\frac{F}{a-F}\right|$. Модуль необходимо использовать потому, что все величины в формуле линзы могут быть отрицательны (для мнимых предметов, изображений и фокусов). Как видно, для рассеивающих линз ($F<0$) величина поперечного увеличения действительного предмета монотонно убывает с ростом расстояния между предметом и





линзой (рисунок слева), а для собирающих линз $F>0$ – растет при $a<F$ и убывает при $a>F$ (рисунок справа). При $a=F$ собирающая линза не формирует конечного изображения предмета. Иногда увеличение вводят как алгебраическую величину: $\Gamma>0$ соответствуют прямому изображению, а $\Gamma<0$ – перевернутому. Как нетрудно проверить, в этим случае справедлива формула $\Gamma=-\frac{b}{a}=\frac{F}{F-a}$ – как для собирающих линз (изображение прямое при $a<F$ и перевернутое при $a>F$), так и для рассеивающих линз (всегда прямое).

Задача: На экране с помощью тонкой линзы получено резкое изображение небольшого предмета с поперечным увеличением $|\Gamma_1|=2$. Предмет передвинули на $s=3$ см, не сдвигая линзу. Для того, чтобы вновь получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом поперечное увеличение оказалось равным $|\Gamma_2|=5$. На какое расстояние s' пришлось передвинуть экран?

Решение: Так как изображения были получены на экране, то они являлись <u>действительными</u>. Это означает, что линза собирающая и в обоих случаях $a_{1,2}>F$. Например, до сдвига предмета и экрана, согласно формуле, полученной в ответе на вопрос, $|\Gamma_1|=\frac{F}{a_1-F}\Rightarrow a_1=\frac{|\Gamma_1|+1}{|\Gamma_1|}F$. Расстояние от линзы до изображения при этом $b_1=\frac{a_1F}{a_1-F}=(|\Gamma_1|+1)F$. Точно так же $a_2=\frac{|\Gamma_2|+1}{|\Gamma_2|}F$ и $b_2=(|\Gamma_2|+1)F$. Поскольку увеличение возросло, то предмет придвигали к линзе, и $s=a_1-a_2=\frac{|\Gamma_2|-|\Gamma_1|}{|\Gamma_1||\Gamma_2|}F$. Поэтому фокусное расстояние линзы $F=\frac{|\Gamma_1||\Gamma_2|}{|\Gamma_2|-|\Gamma_1|}s=10$см. Экран при этом нужно было отодвинуть от линзы, то есть $s'=b_2-b_1=(|\Gamma_2|-|\Gamma_1|)F=|\Gamma_1||\Gamma_2|s=30$см.

ОТВЕТ: $s'=|\Gamma_1||\Gamma_2|s=30$см.