Набор творческих задач.

I. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил a-ю долю того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить b-ю долю того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Решение. Пусть Аня решила A задач, тогда ей осталось решить Ab задач. Пусть t_1 — промежуток времени, после которого Аня и Петя оценили доли оставшихся для решения или решенных задач, t_2 — оставшееся время. Так как скорость решения задач Аней постоянна, то $t_2 = t_1 \cdot b$. Тогда Петя решил Aba задач, ему осталось решить $A + Ab - Aba$ задач. Отношение скоростей равно

$$\frac{((A + Ab - Aba)/t_2)}{(Aba/t_1)} = \frac{A + Ab - Aba}{Aab^2} = \frac{1 + b - ab}{ab^2}.$$

Пример: a = 1/2, b = 1/2, ответ = 10;
a = 1/3, b = 1/2, ответ = 16;
a = 1/4, b = 1/3, ответ = 45.
a=1/5 b=1/2 ответ = 28
a=1/2 b=1/5 ответ = 55
————————————————————
a = 1/2, b = 1/3, ответ = 21;
a = 1/2, b = 1/4, ответ = 36;
a = 3/7, b = 1/2, ответ = 12
a=1/5 b=1/3 ответ = 57
a=1/4 b=1/2 ответ = 22
a=2/5, b = 1/3, ответ = 27
a=2/5 b=1/4 ответ = 46
a=3/7 b=1/3 ответ = 25
Размножение с конкретными числами

1.1. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил половину того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить половину того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 10

1.2. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил треть того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить половину того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 16

1.3. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил четверть того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить треть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 45

1.4. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил пятую часть того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить половину того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 28

1.5. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил половину того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить пятую часть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 55

———————————————-

1.6. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил половину того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить треть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 21

1.7. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил половину того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить четверть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 36

1.8. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил три седьмых того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить половину того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 12

1.9. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил пятую часть того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить треть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 57

1.10. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил четверть того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить половину того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 22

1.11. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил две пятых того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить треть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 27

1.12. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил две пятых того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить четверть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 46

1.13. Петя и Аня за урок математики должны решить одинаковое число задач. Через некоторое время после начала урока оказалось, что Петя решил три седьмых того, что осталось решить Ане, а Ане осталось решить треть того, что она уже решила. Аня подсчитала, что если будет продолжать решать задачи с той же скоростью, то она успеет решить все задачи точно к концу урока. Во сколько раз Пете нужно увеличить свою скорость решения задач, чтобы решить их все к концу урока?

Ответ: 25

II. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(2x^2 - y) - f(2x - xy) = f(x) + 4x^4 + y^2 - 5x^2 - x^2y^2 + 3.$$

Найдите $f(15)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Решение. Функция $f(x)$ сразу бы нашлась, если бы сократились некрасивые слагаемые в левой части тождества. Это произойдет, например, при равенстве агументов в левой части, т.е. при $2x^2 - y = 2x - xy$, что равносильно $(x-1)(y+2x) = 0$. При подстановке в исходное уравнение $y = -2x$ получаем $f(x) = x^2 - 3$. Эта функция обращает исходное равенство в тождество. Значит, $f(15) = 15^2 - 3 = 222$.

Ответ: 222.

□

2.1. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(2x^2 - y) - f(2x - xy) = f(x) + 4x^4 + y^2 - 5x^2 - x^2y^2 + 3.$$

Найдите $f(15)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 222.

2.2. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(2y^2 - x) - f(2y - xy) = f(y) + 4y^4 + x^2 - 5y^2 - x^2y^2 - 3.$$

Найдите $f(16)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 259.

2.3. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(x^2 - 2y) - f(2x - xy) = f(x) + x^4 - x^2y^2 + 4y^2 - 5x^2 - 4.$$

Найдите $f(17)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 293.

2.4. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(y^2 - 2x) - f(2y - xy) = f(y) + y^4 - x^2y^2 + 4x^2 - 5y^2 + 4.$$

Найдите $f(18)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 320.

2.5. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(xy - 2x) - f(x^2 - 2y) = f(x) + 2x^2y^2 - 2x^4 - 8y^2 + 6x^2 + 2.$$

Найдите $f(11)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 240.

2.6. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(xy - 2y) - f(y^2 - 2x) = f(y) + 2x^2y^2 - 2y^4 - 8x^2 + 6y^2 - 2.$$

Найдите $f(12)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 290.

2.7. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(xy-2x)-f(2x^2-y)=f(x)+2x^2y^2-8x^4-2y^2+6x^2-4.$$

Найдите $f(13)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 342.

2.8. Для всех действительных чисел x и y функция f удовлетворяет уравнению

$$f(xy-2y)-f(2y^2-x)=f(y)+2x^2y^2-8y^4-2x^2+6y^2+4.$$

Найдите $f(14)$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 388.

III. Для каждого целого значения a найдите сумму всех нечётных решений уравнения

$$n!x^{n+1}-3\cdot n!x^n+15x^{n-1}-45x^{n-2}-11x^3+20x^2+(39-(3n)!\cdot a)x+3a\cdot(3n)!=0.$$

В ответе укажите сумму всех нечётных решений уравнения при $a=2020!$.

Решение. Справедливо разложение

$$(n!x^n+15x^{n-2}-11x^2-13x-(3n)!\cdot a)(x-3)=0$$

Поскольку выражение в первой скобке не содержит нечётных решений (выражение в первой скобке число нечётное), то при любом целом a существует и единственно только одно решение $x=3$.

Ответ: 3.

□

3.1. Пусть $n=2021^{2023!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$n!x^{n+1}+20x^2+(39-(3n)!\cdot a)x+3a\cdot(3n)!=3\cdot n!x^n+45x^{n-2}+11x^3-15x^{n-1}.$$

при $a=2020!$ и при $a=2011!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 3. Получено на основе $(n!x^n+15x^{n-2}-11x^2-13x-(3n)!\cdot a)(x-3)=0$.

3.2. Пусть $n=2023^{2021!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$n!x^{n+1}+20x^2+(39-(3n)!\cdot a)x+3a\cdot(3n)!=3\cdot n!x^n+45x^{n-2}+11x^3-15x^{n-1}.$$

при $a=2021!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 3.

3.3. Пусть $n=2019^{2021!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$a\cdot n!x^{n+1}-51x^{n-2}+13x^3-3\cdot(4n)!=17x^{n-1}+(45+(4n)!)x-24x^2-3a\cdot n!x^n.$$

при $a=2020!$ и при $a=2009!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -3. Получено на основе $(a\cdot n!x^n-17x^{n-2}+13x^2-15x-(4n)!)(x+3)=0$.

3.4. Пусть $n = 2021^{2019!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$a \cdot n!x^{n+1} - 51x^{n-2} + 13x^3 - 3 \cdot (4n)! = 17x^{n-1} + (45 + (4n)!)x - 24x^2 - 3a \cdot n!x^n.$$

при $a = 2021!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -3.

3.5. Пусть $n = 2019^{2023!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$(3n)!x^{n+1} - 11x^{n-1} + 15x^3 + 3a \cdot n! = 3 \cdot (3n)!x^n + 28x^2 + (51 + n! \cdot a)x - 33x^{n-2}.$$

при $a = 2022!$ и при $a = 2007!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 3. Получено на основе $((3n)!x^n - 11x^{n-2} + 15x^2 + 17x - n! \cdot a)(x - 3) = 0$.

3.6. Пусть $n = 2023^{2019!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$(3n)!x^{n+1} - 11x^{n-1} + 15x^3 + 3a \cdot n! = 3 \cdot (3n)!x^n + 28x^2 + (51 + n! \cdot a)x - 33x^{n-2}.$$

при $a = 2020!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 3.

3.7. Пусть $n = 2017^{2021!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$n!x^{n+1} + 65x^{n-2} + 15x^3 + 64x^2 = -13x^{n-1} + (55 + (4n)! \cdot a)x + 5a \cdot (4n)! - 5 \cdot n!x^n.$$

при $a = 2012!$ и при $a = 2021!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -5. Получено на основе $(n!x^n + 13x^{n-2} + 15x^2 - 11x - (4n)! \cdot a)(x + 5) = 0$.

3.8. Пусть $n = 2021^{2017!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$n!x^{n+1} + 65x^{n-2} + 15x^3 + 64x^2 = -13x^{n-1} + (55 + (4n)! \cdot a)x + 5a \cdot (4n)! - 5 \cdot n!x^n.$$

при $a = 2013!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -5.

3.9. Пусть $n = 2017^{2019!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$an!x^{n+1} + 75x^{n-2} + 11x^3 + 5 \cdot (3n)! = 15x^{n-1} + 68x^2 - (65 - (3n)!)x + 5a \cdot n!x^n.$$

при $a = 2018!$ и при $a = 2009!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 5. Получено на основе $(a \cdot n!x^n - 15x^{n-2} + 11x^2 - 13x - (3n)!)(x - 5) = 0$.

3.10. Пусть $n = 2019^{2017!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$an!x^{n+1} + 75x^{n-2} + 11x^3 + 5 \cdot (3n)! = 15x^{n-1} + 68x^2 - (65 - (3n)!)x + 5a \cdot n!x^n.$$

при $a = 2019!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: 5.

3.11. Пусть $n = 2017^{2023!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$(4n)!x^{n+1} - 13x^{n-1} - 17x^3 - 5a \cdot n! = 65x^{n-2} + 70x^2 - (75 - n! \cdot a)x - 5 \cdot (4n)!x^n.$$

при $a = 2021!$ и при $a = 2014!$. В ответе запишите наименьшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -5. Получено на основе $((4n)!x^n - 13x^{n-2} - 17x^2 + 15x - n! \cdot a)(x + 5) = 0$.

3.12. Пусть $n = 2023^{2017!}$. Найдите все нечётные решения уравнения

$$(4n)!x^{n+1} - 13x^{n-1} - 17x^3 - 5a \cdot n! = 65x^{n-2} + 70x^2 - (75 - n! \cdot a)x - 5 \cdot (4n)!x^n.$$

при $a = 2018!$. В ответе запишите наибольшее из всех полученных чисел. Если нечётных корней нет, то запишите в графе ответов 0.

Ответ: -5.

IV. Плоскость π пересекает пирамиду $SABC$ по рёбрам AS, AB, SC, CB. Найдите расстояние от точки S до плоскости π, если известно, что расстояние от точек A, C до плоскости π равно α, γ соответственно, отношение объёма пирамиды $SABC$ к площади сечения плоскостью π равно k, и $CM : MB = l_1 : l_2$, где M — точка пересечения плоскости π с ребром BC пирамиды.

Если условие задачи допускает несколько геометрических конфигураций, в ответ впишите наибольшее из возможных расстояний. Если описанная в условии конфигурация невозможна, в ответ впишите 0. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Решение. Пусть K, L, N точки пересечения плоскости сечения с ребрами AS, CS, AB соответственно. Пусть искомое расстояние равно β. Тогда $AK : KS = \alpha : \beta$, $SL : LC = \beta : \gamma$.

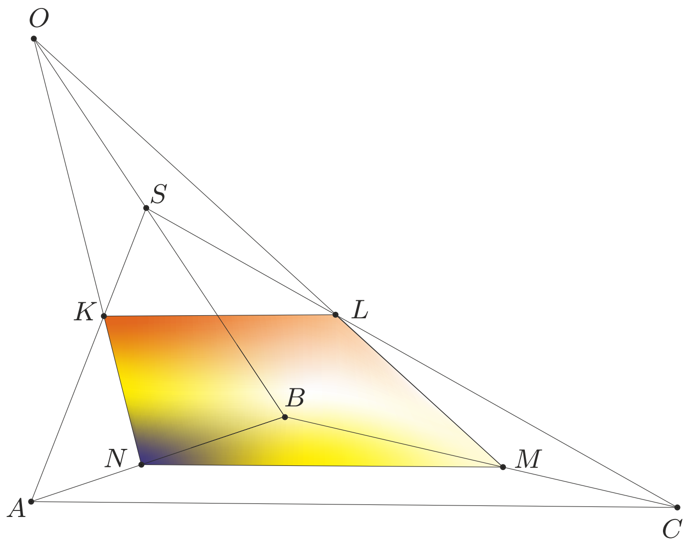

Рис. 1:

Обозначим отношение $AN : NB$ через $r_1 : r_2$. Обозначим проекции точек B, C, A на плоскость π через B_1, C_1, A_1. Тогда из подобий $\triangle BB_1M \sim \triangle CC_1M$ и $\triangle BB_1N \sim \triangle AA_1N$ получаем:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{l_2}{l_1}; \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{r_2}{r_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Выразим объём многогранника $KLANMC$ двумя способами:

$$V_{AKLMN} + V_{CALM} = V_{CKLMN} + V_{AKNC}.$$

Обозначим через V объём исходной пирамиды, а через S — площадь сечения. Тогда

$$\frac{1}{3} \cdot \alpha \cdot S + \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2} V = \frac{1}{3} \cdot \gamma \cdot S + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{r_1}{r_1+r_2} V.$$

Поскольку $\frac{r_1}{r_1+r_2} = \frac{1}{1+\frac{r_2}{r_1}} = \frac{l_1\alpha}{l_1\alpha+l_2\gamma}$, то

$$\frac{1}{3}(\alpha-\gamma) = k\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{r_1}{r_1+r_2} - \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \cdot \frac{l_1}{l_1+l_2}\right).$$

Подставив $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 3$, $\gamma = 2$, $k = 4$ находим

$$\frac{1}{3} = 4\left(\frac{3}{3+\beta} \cdot \frac{3}{3+2\cdot 3} - \frac{2}{2+\beta} \cdot \frac{1}{4}\right) \Longleftrightarrow \beta^2 - \beta = 0.$$

Откуда $\beta = 1$.

Ответ: 1.

□

4.1. $l_1 : l_2 = 1 : 5$, $\alpha = 5$, $\gamma = 2$, $k = 273/44$.
Ответ. $1,5$.
4.2. $l_1 : l_2 = 1 : 5$, $\alpha = 5$, $\gamma = 4$, $k = 403/40$.
Ответ. $1,2$.
4.3. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 3$, $\gamma = 2$, $k = 187/45$.
Ответ. $1,4$.
4.4. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 3$, $\gamma = 2$, $k = 276/65$.
Ответ. $1,6$.
4.5. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 3$, $\gamma = 2$, $k = 152/35$.
Ответ. $1,8$.
4.6. $l_1 : l_2 = 1 : 4$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 806/111$.
Ответ. $2,2$.
4.7. $l_1 : l_2 = 1 : 4$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 308/41$.
Ответ. $2,6$.
4.8. $l_1 : l_2 = 1 : 2$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 493/93$.
Ответ. $2,8$.
4.9. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 7$, $\gamma = 4$, $k = 285/32$.
Ответ. $3,5$.
4.10. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 5$, $\gamma = 4$, $k = 221/28$.
Ответ. $2,5$.
4.11. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 5$, $\gamma = 3$, $k = 546/85$.
Ответ. $2,2$.
4.12. $l_1 : l_2 = 1 : 3$, $\alpha = 5$, $\gamma = 3$, $k = 308/47$.
Ответ. $2,5$.
4.13. $l_1 : l_2 = 1 : 5$, $\alpha = 5$, $\gamma = 3$, $k = 544/65$.
Ответ. $1,8$.
4.14. $l_1 : l_2 = 1 : 5$, $\alpha = 5$, $\gamma = 3$, $k = 133/15$.
Ответ. $2,6$.
4.15. $l_1 : l_2 = 1 : 4$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 232/33$.
Ответ. $1,8$.
4.16. $l_1 : l_2 = 1 : 4$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 198/29$.
Ответ. $1,4$.
4.17. $l_1 : l_2 = 1 : 4$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$, $k = 644/93$.
Ответ. $1,6$.