Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике состоял из блиц-тура (5 задач, 3 часа на решение) и творческой части (4 задачи, решение которых нужно было отправить в течение недели).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из пяти задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство $\dfrac{9-2\sqrt{1-x}}{10-\sqrt{x^2-4x+4}} \geq 1$. В ответе укажите сумму всех целочисленных значений *x*, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -24.

Решение. Так как $1-x \geq 0$, то $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = 2-x$. Поэтому исходное неравенство при $x \leq 1$ равносильно неравенству $\dfrac{9-2\sqrt{1-x}}{8+x} \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1-x-2\sqrt{1-x}}{8+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)^2-4(1-x)}{8+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(-3-x)}{8+x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x \in (-8;-3] \cup \{1\}$. Сумма целых корней равна $-7-6-5-4-3+1=-24$.

2. Решите уравнение $5\sin x + 2\cos 2x = 3$. В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку *A*, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

$A=[2\pi m; \pi(2m+1)]$, $m=-3$.

Ответ: $-51{,}84$ (точное значение: $-\dfrac{33\pi}{2}$).

Решение. Выражаем косинус двойного угла через $t=\sin x$ и приводим уравнение к квадратному: $4t^2-5t+1=0$, корни которого 1 и 1/4. Поэтому решения уравнения: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$. На отрезок $A=[-6\pi;-5\pi]$ попадает три корня: $-\frac{11\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{4}-6\pi$ и $-\arcsin\frac{1}{4}-5\pi$. Их сумма равна $-\frac{33\pi}{2}\approx-51{,}84$.

3. Внутри треугольника *ABC* со сторонами 7, 4 и 6 выбрана точка *M* так, что $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA$. Найдите сумму квадратов расстояний от точки *M* до вершин треугольника. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 37 (точное значение: $\frac{101-3\sqrt{85}}{2}$).

Решение. Обозначим стороны треугольника $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$, расстояния от точки *M* до вершин $AM=k$, $BM=l$ и $CM=m$.

Площадь ΔABC равна $S=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}+S_{\Delta BCM}=\frac{\sqrt{3}}{4}(kl+km+lm)$.

Из теоремы косинусов получаем: $a^2=k^2+l^2-2kl\cos120^\circ=k^2+l^2+kl$, $b^2=k^2+m^2+km$, $c^2=l^2+m^2+lm$, откуда, складывая почленно полученные равенства, находим

$$k^2+l^2+m^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{kl+km+lm}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $k^2+l^2+m^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{3}}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$. Подставляя сюда численные значения из условия задачи, получаем ответ: $k^2+l^2+m^2=\frac{101-3\sqrt{85}}{2}\approx37$.

4. Решите систему $\begin{cases} x^2+3xy-2y^2=2, \\ 3x^2-xy+5y^2=7. \end{cases}$ Вычислите значения выражения x_k-y_k для каждого решения (x_k,y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,58 (точное значение: $\frac{25}{\sqrt{251}}$).

Решение. Вычитаем из умноженного на 7 первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получаем: $x^2+23xy-24y^2=0 \Leftrightarrow$ $(x+24y)(x-y)=0 \Leftrightarrow x=y$ или $x=-24y$.

После подстановки в первое уравнение $x=y$ получаем $x^2=1$. Решения системы: $(x;y)=(1;1)$, $(-1;-1)$.

После подстановки в первое уравнение $x=-24y$ получаем $502y^2=2$. Решения системы: $(x;y)=\left(\frac{24}{\sqrt{251}};-\frac{1}{\sqrt{251}}\right)$, $\left(-\frac{24}{\sqrt{251}};\frac{1}{\sqrt{251}}\right)$.

Отсюда $(x-y)_{\max}=\frac{25}{\sqrt{251}}\approx 1,58$.

5. В результате реструктуризации импорта на складе торговой сети овощей стало на 40% больше, а фруктов – на 20% меньше. Определите, сколько процентов фруктов стало на складе, если до реструктуризации их было 20%.

Ответ: 12,5.

Решение. Пусть до реструктуризации фруктов было $20a$ (тонн или каких-то других единиц), а овощей – $80a$. Тогда после реструктуризации овощей станет $80a\cdot\left(1+\frac{40}{100}\right)=112a$, а фруктов – $20a\left(1-\frac{20}{100}\right)=16a$. Таким образом, фруктов стало $\frac{16a}{112a+16a}\cdot 100\%=12,5\%$.