

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 9 класса

Вариант 1а (Кемерово)

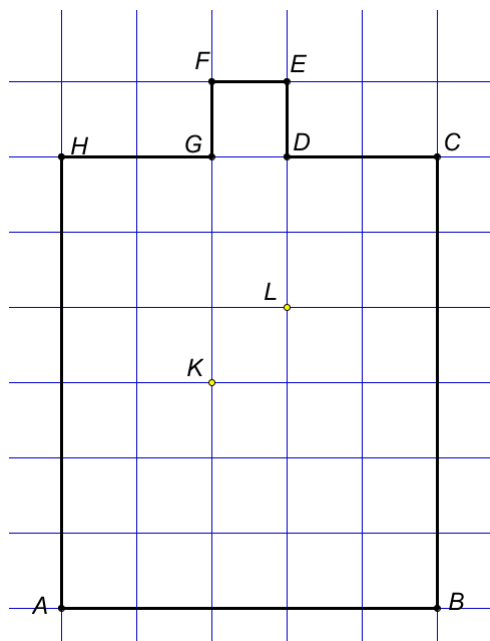
1. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Ответ: 2063.

2. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 950.

Ответ: 24102.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см. рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.



4. Назовем число X «20-подпирающим», если для любых 20 действительных чисел a_1, \dots, a_{20} , сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее X , округленное до тысячных по стандартным математическим правилам.

Ответ $\frac{1}{40} = 0.025$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}, \text{ при } n \geq 1. \text{ Найдите } a_{100}.$$

Ответ: 5050.

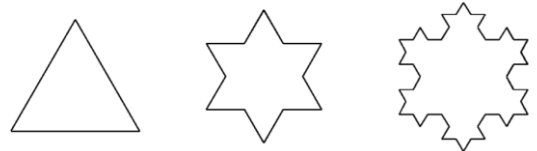
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0 , M_2 – получен зазубриванием M_1, \dots, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0 , M_1 и M_2 .

Найдите $S(M_{2018})$ если известно, что $S(M_0)=3$. В ответе укажите значение $S(M_{2018})$, округленное до сотых.

Ответ: 4.8.

Вариант 2а (Уфа)

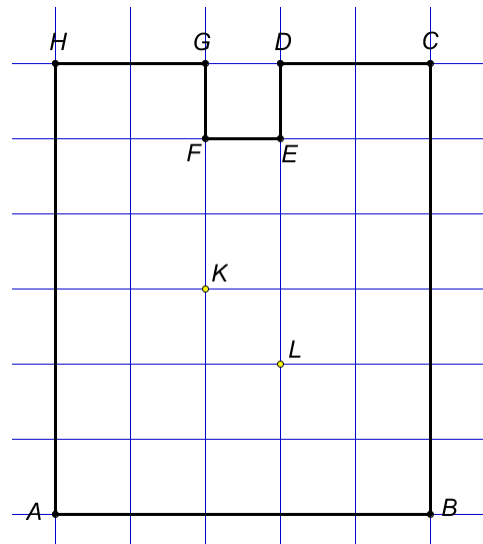
1. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2000 месте среди оставшихся?

Ответ: 2045.

2. Назовем натуральное число «*занимательным*», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму занимательных чисел, не превосходящих 980.

Ответ: 26991.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.



Ответ 40.

4. Назовем число X «*25-подпирающим*», если для любых 25 действительных чисел a_1, \dots, a_{25} , сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 25-подпирающее X , округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\frac{1}{50} = 0.02$.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}, \text{ при } n \geq 1. \text{ Найдите } a_{200}.$$

Ответ: 20100.

6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0 , M_2 – получен зазубриванием M_1, \dots, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0 , M_1 и M_2 .

Найдите $S(M_{2018})$ если известно, что $S(M_0)=2$. В ответе укажите значение $S(M_{2000})$, округленное до сотых.

Ответ: 3.2.

Вариант 3а (Челябинск)

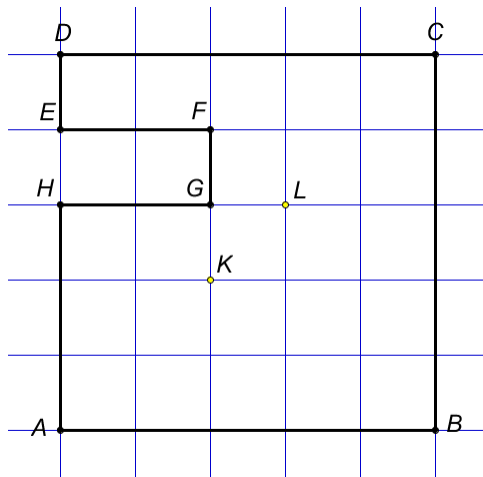
1. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2600 месте среди оставшихся?

Ответ: 2651.

2. Назовем натуральное число «удивительным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму удивительных чисел, не превосходящих 999.

Ответ : 27972.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.



4. Назовем число X «50-подпирающим», если для любых 50 действительных чисел a_1, \dots, a_{50} , сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X , округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\frac{1}{100} = 0.01$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}, \text{ при } n \geq 1. \text{ Найдите } a_{999}.$$

Ответ: 499500.

6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником (см. рис.):

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0 , M_2 – получен зазубриванием M_1, \dots, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0 , M_1 и M_2 .

Найдите $S(M_{2018})$ если известно, что $S(M_0)=4$. В ответе укажите значение $S(M_{1000})$, округленное до сотых.

Ответ: 6.4.