Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3+1009=2018x, \qquad y^3+1009=2018y, \qquad z^3+1009=2018z.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}-3^{2\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{y}-\sqrt{x}, \\ x^2+y^2 \leq 9+2xy. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1}+\operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{100-1}{100^3-1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 2

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его треть есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть куб некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3+1009=2018x^2, \qquad y^3+1009=2018y^2, \qquad z^3+1009=2018z^2.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}-3^{2\sqrt{y}}\le 2\sqrt{y}-\sqrt{x}, \\ x^2-16+y^2\le 0. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2+1}{2^3+1}+\operatorname{arctg}\frac{3+1}{3^3+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{100+1}{100^3+1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 10, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{4\pi}{5}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 3

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его треть есть квадрат некоторого целого числа, а половина есть куб некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3 = 2016x + 1008, \qquad y^3 = 2016y + 1008, \qquad z^3 = 2016z + 1008.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{-x}} - 2^{\sqrt{-3y}} \geq \sqrt{-3y} - \sqrt{-x}, \\ x^2 + 2xy \leq 16 - y^2. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{101-1}{101^3-1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 6, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$.

Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 4

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть седьмая степень некоторого целого числа, а седьмая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3+2016x^2=1008, \qquad y^3+2016y^2=1008, \qquad z^3+2016z^2=1008.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{-x}}-2^{\sqrt{-3y}}\geq\sqrt{-3y}-\sqrt{-x}, \\ x^2-9+y^2\leq 0. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2+1}{2^3+1}+\operatorname{arctg}\frac{3+1}{3^3+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{101+1}{101^3+1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 20, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{4\pi}{5}$.

Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: $2^6 \cdot 5^5$. Решение. Искомое число делится на 10, запишем его в виде $x = 10n$. Так как $5n = a^5$, $2n = b^2$, то $2a^5 = 5b^2$. Отсюда следует, что a кратно 5, пусть $a = 5p$. Тогда $2 \cdot 5^4 p^5 = b^2$. Левая часть будет полным квадратом при минимальном $p = 2$. Поэтому $b^2 = 2^6 \cdot 5^4$, $n = 2^5 \cdot 5^4$, и $x = 2^6 \cdot 5^5$.

1-2. Ответ: $3^6 \cdot 5^{10}$.

1-3. Ответ: $2^4 \cdot 3^3$.

1-4. Ответ: $2^8 \cdot 7^9$.

2-1. Ответ: 2. Решение. Кубическое уравнение $t^3 - 2018t + 1009 = 0$ имеет три различных действительных корня (так как для функции $f(t) = t^3 - 2018t + 1009$ выполняется $f(-100) < 0$, $f(0) > 0$, $f(20) < 0$, $f(100) > 0$). Это корни и будут числами *x*, *y* и *z*. Поэтому по теореме Виета $x + y + z = 0$, $xy + yz + zx = -2018$, $xyz = -1009$. Искомая сумма

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{-2018}{-1009} = 2.$$

2-2. Ответ: -2.

2-3. Ответ: -2.

2-4. Ответ: 2.

3-1. Ответ: 1,5. Решение. Первое неравенство перепишем в виде $3^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 3^{2\sqrt{y}} + 2\sqrt{y}$. Так как функция $f(t) = 3^t + \sqrt{t}$ строго возрастает, то $\sqrt{x} \geq 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x \geq 4y \geq 0$. Второе неравенство задает полосу $-3 \leq x - y \leq 3$ $\Leftrightarrow x - 3 \leq y \leq x + 3$. Прямая $y = \dfrac{x}{4}$ пересекается с прямой $y = x - 3$ в точке

A с координатами $A(4,1)$. Таким образом, искомая фигура есть треугольник с вершинами $O(0,0)$, $B(3,0)$ и $A(4,1)$. Его площадь равна 1,5.

3-2. Ответ: $8\operatorname{arctg}4$. Решение. Первое неравенство перепишем в виде $3^{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\le 3^{2\sqrt{y}}+2\sqrt{y}$. Так как функция $f(t)=3^t+\sqrt{t}$ строго возрастает, то $\sqrt{x}\le 2\sqrt{y} \iff 0\le x\le 4y$. Второе неравенство задает круг радиуса 4 с центром в начале координат. Пересечение двух множеств – сектор этого круга с центральным углом $\alpha=\operatorname{arctg}4$. Поэтому искомая площадь равна $8\operatorname{arctg}4$.

3-3. Ответ: 2.

3-4. Ответ: $4{,}5\cdot\operatorname{arctg}3$.

4-1. Ответ: $\frac{99}{203}$. Решение. Так как $\operatorname{arctg}\frac{n-1}{n^3-1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}$

$=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n$, то $A=\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1}+\operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{100-1}{100^3-1}$

$=(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)+(\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}3)+\ldots+(\operatorname{arctg}101-\operatorname{arctg}100)$

$=\operatorname{arctg}101-\operatorname{arctg}2$. Тогда $\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg}101-\operatorname{arctg}2)=\frac{101-2}{1+101\cdot 2}=\frac{99}{203}$.

4-2. Ответ: $\frac{99}{101}$.

4-3. Ответ: $\frac{20}{41}$.

4-2. Ответ: $\frac{50}{51}$.

5-1. Ответ: $14+2\sqrt{35}$ и $10+2\sqrt{35}$. Решение. Пусть радиусы большего и меньшего оснований равны R и r соответственно, $l=12$ – длина образующей, x

– длина продолжения образующей до целого конуса, $\varphi=\alpha\pi=\dfrac{2\pi}{3}$ – заданный в условии центральный угол. Тогда из подобия треугольников в осевом сечении получаем $\dfrac{r}{x}=\dfrac{R}{x+l} \Rightarrow x=\dfrac{rl}{R-r}$, а из равенства длины окружности меньшего основания и меньшей дуги части кругового кольца следует $x\varphi=2\pi r$, откуда $R-r=\dfrac{\alpha l}{2}$.

Равенство данных в условии площадей дает уравнение

$$\pi R^2+\pi r^2+\frac{\varphi}{2}\left(\left(x+l\right)^2-x^2\right)=\pi\left(\left(x+l\right)^2-x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$R^2+r^2=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(2x+l\right)l.$$

Подставляя сюда $x=\dfrac{rl}{R-r}$ и учитывая то, что $R-r=\dfrac{\alpha l}{2}$, получаем

$$R^2+r^2=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{l^2\left(R+r\right)}{R-r} \Leftrightarrow$$

$$\frac{R^2+r^2}{R+r}=l\left(\frac{2}{\alpha}-1\right).$$

При $l=12$, $\varphi=\alpha\pi=\dfrac{2\pi}{3}$ получаем: $R-r=\dfrac{\alpha l}{2}=4$ и $\dfrac{R^2+r^2}{R+r}=l\left(\dfrac{2}{\alpha}-1\right)=24$. Поэтому $r=R-4$, и из $\dfrac{R^2+\left(R-4\right)^2}{R+R-4}=24$ следует $R^2-28R+56=0$, то есть $R=14\pm 2\sqrt{35}$. Так как $R>4$, то $R=14+2\sqrt{35}$, $r=10+2\sqrt{35}$.

5-2. Ответ: $\dfrac{19+\sqrt{209}}{2}$ и $\dfrac{11+\sqrt{209}}{2}$.

5-3. Ответ: $7+\sqrt{35}$ и $5+\sqrt{35}$.

5-4. Ответ: $19+\sqrt{209}$ и $11+\sqrt{209}$.