Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–1** (Саратов)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{3x^2-12x+13}\leqslant 4x-x^2-2.$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x)+\arccos(2x)\geqslant \frac{\pi}{4}\cdot(y^2-2).$$

3. Найдите наименьшее натуральное число q, для которого существует такое целое число p, что уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

4. В треугольник ABC, в котором сумма сторон AC и BC в $9/5$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение r;

б) все возможные значения r.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$16^x-6\cdot 8^x+8\cdot 4^x+(2-2a)2^x-a^2+2a-1=0$$

имеет ровно три различных корня.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–2** (Саратов)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{2x^2+4x+3}\leqslant 2-2x-x^2.$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(3x)+\arccos(3x)\geqslant \frac{\pi}{6}\cdot(y^2-6).$$

3. Найдите наименьшее натуральное число q, для которого существует такое целое число p, что уравнение $x^4+2px^2+q=0$ имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

4. В треугольник ABC, в котором сумма сторон AC и BC в $15/7$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно s. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение s;

б) все возможные значения s.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$81^x-6\cdot 27^x+8\cdot 9^x+2(1+a)3^x-2a-a^2-1=0$$

имеет ровно три различных корня?

март 2018 г.

*Ответы и решения к варианту **1–1** (2)*

1. Сравнение максимума и минимума левой и правой частей соответственно.

Ответ: $x = 2$.

Ответ к варианту: *2–2*: $x = -1$.

2. По области определения $-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5$. Т.к. $\arcsin(2x) + \arccos(2x) = \dfrac{\pi}{2}$, то $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

Ответ: 4.

Ответ к варианту: *2–2*: 4.

3. В силу того, что уравнение биквадратное, то его корни, образующие арифметическую прогрессию, имеют вид $-3a$, $-a$, a, $3a$. Т.е. уравнение имеет вид $x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4 = 0$, $p = -10a^2$, $q = 9a^4$. Так как $3|p| = 10\sqrt{q}$, то q — полный квадрат, делящийся на 9.

Ответ: $q = 9$.

Ответ к варианту: *2–2*: $q = 9$.

4.

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{(p-c)^2}{ab} = \frac{(a+b-c)^2}{4ab} = \frac{4(a+b)^2}{81ab}.$$

Поскольку $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (знак равно достигается, только в случае $a = b$), то $\frac{16(a+b)^2}{81ab} \geqslant \frac{4\cdot 4ab}{81ab} = \frac{16}{81}$.

Перепишем отношение площадей в следующем виде:

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{4(a+b)^2}{81ab} = \frac{4}{81}\left(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}\right) = \frac{4}{81}\left(t + \frac{1}{t} + 2\right),$$

где $t = a/b$. Из условия существования треугольника вытекают неравенства: $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$ учитывая то, что $c = 5(a+b)/9$ последнии неравенства равносильны следующему: $7/2 > a/b > 2/7$. Таким образом $t \in (2/7; 7/2)$. Функция $f(t) = t+1/t$ монотонно убывает на $(0;1)$ и возрастает на $(1;+\infty)$. Поскольку $f(2/7) = f(7/2)$, то $f(t) \in [f(1); f(7/2))$ при $t \in (2/7; 7/2)$. Следовательно $\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} \in [16/81; 2/7)$.

Ответ: а) 16/81. б) $[16/81; 2/7)$.Ответ к варианту: *2–2*: а) 64/225. б) $[64/225; 4/11)$.

5. Замена $2^x = t > 0$. Уравнение $t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2(1-a)t - (a-1)^2 = 0$ квадратное относительно $(a-1)$: $(a-1)^2 + 2t(a-1) - t^4 + 6t^3 - 8t^2 = 0$. Поскольку $D/4 = t^2 + t^4 - 6t^3 + 8t^2 = t^2(t-3)^2$, то

$$\left[\begin{array}{l} a - 1 = -t + t^2 - 3t = t^2 - 4t \\ a - 1 = -t - t^2 + 3t = -t^2 + 2t. \end{array}\right.$$

Т.е. задача равносильна нахождению условий, при которых система

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t^2 - 4t + 1 - a = 0 \\ t^2 - 2t - 1 + a = 0 \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Возможны случаи:

1) $D_1 > 0$, $1 - a > 0$, $D_2 = 0 \Rightarrow$ нет решений;

2) $D_1 = 0$, $D_2 > 0$, $-1 + a > 0 \Rightarrow$ нет решений;

3) $D_1 > 0$, $1 - a \leqslant 0$, $D_2 > 0$, $-1 + a > 0 \Rightarrow a \in (1; 2)$;

4) $D_1 > 0$, $1 - a > 0$, $D_2 > 0$, $-1 + a \leqslant 0 \Rightarrow a \in (-3; 1)$;

И не забыть проверить в случаях 3) 4) тот момент, когда уравнения могут иметь общий корень. Уравнения имеют общий корень при $a = 1$ и при $a = -2$.

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Ответ к варианту: *2–2*: $(-2; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 3)$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–1** (Кемерово)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^2+14x+40}-4}.$$

2. Число в семеричной системе счисления является трехзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления (найдите все возможные значения)?

3. Решите уравнение

$$6\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{ctg} 3x = 0.$$

4. В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6:1$ и $2:3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно пустое) решений неравенства

$$\log_2(x^2+4ax+4a^2-a) < 2,$$

меньше 2.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–2** (Кемерово)*

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+16x+55}-4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-2}.$$

2. Число в девятеричной системе счисления является трехзначным. В семеричной системе счисления оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления (найдите все возможные значения)?

3. Решите уравнение

$$3\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} 3x = 0.$$

4. В окружность радиуса $3\sqrt{11}$ вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении $4:3$ и $6:1$. Найдите расстояние от этой точки до центра окружности.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно пустое) решений неравенства

$$\log_4(x^2-6ax+9a^2+a) < 1,$$

меньше 2.

март 2018 г.

*Ответы и решения к варианту **2–1** (2)*

1. Неравенство равносильно

$$\frac{\sqrt{x^2+14x+40}-2\sqrt{x^2-x-2}}{\left(\sqrt{x^2-x-2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+14x+40}-4\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+14x+40-4(x^2-x-2)}{(x^2-x-6)(x^2+14x+24)} \leqslant 0, \\ x^2-x-2 \geqslant 0, \\ x^2+14x+40 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-8)(x+2)}{(x-3)(x+2)^2(x+12)} \geqslant 0, \\ (x+1)(x-2) \geqslant 0, \\ (x+10)(x+4) \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-12)\cup(-2;-1]\cup[2;3)\cup[8;+\infty)$.
Ответ к варианту *6–2*: $(-\infty;-13)\cup(-3;-2]\cup[1;2)\cup[7;+\infty)$.

2. Если в семеричной системе число записывается как $\overline{abc}=49a+7b+c$, то в системе счисления с основанием 11 оно равно $121c+11b+a$. Значит, $49a+7b+c=121c+11b+a \iff b=12a-30c=6(2a-5c)$. Так как $b\in[0;6]$, то либо $b=6$, $2a-5c=1$ (тогда $c=1$, $a=3$), либо $b=0$, $2a-5c=0$ (тогда $c=2$, $a=5$). В первом случае число равно $361_7=3\cdot49+6\cdot7+1=190$, во втором — $502_7=5\cdot49+0\cdot7+2=247$.

Ответ: 190 и 247.

Ответ к варианту *7–2*: 248. (Это число 305_9.)

3. Уравнение равносильно

$$5(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}3x)=\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x \Leftrightarrow 5\frac{\cos 2x}{\cos x\sin 3x}=\frac{\sin x}{\cos x\cos 2x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10\cos^2 2x=\cos 2x-\cos 4x, \\ \cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0,\ \sin 3x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=-\frac{1}{4}, \\ \cos 2x=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+\pi n,\ n\in Z$.
Ответ к варианту *6–2*: $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+\pi n,\ n\in Z$.

4. Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, AC и BD — рассматриваемые хорды, пересекающиеся в точке K. Обозначим $AK=6x$, $CK=x$, $BK=2y$, $DK=3y$.

По теореме о пересекающихся хордах $6x^2=6y^2$. Проведем серединные перпендикуляры OM и ON к хордам AC и BD соответственно. Тогда $MK=6x-\frac{7x}{2}=\frac{5x}{2}$, $NK=3x-\frac{5x}{2}=\frac{x}{2}$, $OK^2=\frac{26x^2}{4}$.

Таким образом, $6x^2+\frac{26x^2}{4}=R^2=50$, откуда $x=2$, $OK=\sqrt{26}$.

Ответ: $\sqrt{26}$. Ответ к варианту: *6–2*: $\sqrt{51}$.

5. Неравенство равносильно такому

$$0<(x+2a)^2-a<4 \Leftrightarrow a<(x+2a)^2<4+a$$

1) Если $a<0$, то получаем неравенство $(x+2a)^2<4+a$, удовлетворяющее требованию задачи, когда $4+a<1 \Leftrightarrow a<-3$.

2) Если же $a\geqslant 0$, то получаем неравенство $\sqrt{a}<|x+2a|<\sqrt{4+a}$, удовлетворяющее требованию задачи, когда $\sqrt{4+a}<\sqrt{a}+1 \Leftrightarrow a>9/4$.

Ответ: $a<-3$, $a>9/4$.

Ответ к варианту *6–2*: $a<-9/4$, $a>3$.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1** (Челябинск)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причем процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в пропорции $1:2:3$, то получится 10% морс, а если в пропорции $5:4:3$, то получится 25% морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трех растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

3. Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB=4$, $AC=5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = 11/16$.

4. Для функции $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2017) + f(2018).$$

5. Найдите наименьшее значение $|x-y|$ при условии

$$(\cos^4 x + 1)(4\cos^4 y + 1) = 8\cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2** (Челябинск)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x+2}-3}.$$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причем процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в пропорции $6:5:4$, то получится 30%-й морс, а если в пропорции $2:3:4$, то малины получится в 5 раз меньше, чем воды. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трех растворов? Каким планируется содержание малины во второй бочке?

3. Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB=4$, $AC=5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = 7/8$.

4. Для функции $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2017) + f(2018).$$

5. Найдите наибольшее значение $|x-y|$ при условии

$$(4\cos^4 x + 1)(\cos^4 y + 1) = 8\cos^2 x \cos^3 y, \quad x \in [0; \pi], \quad y \in [3\pi/2; 5\pi/2].$$

март 2018 г.

Ответы и решения к варианту 3–1 (2)

1. Так как

$$\sqrt{x-2}-3<\sqrt{x-1}-2,$$

то неравенство равносильно следующему

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}>3,\\ \sqrt{x-1}<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2\geqslant 9\\ 0\leqslant x-1<4.\end{array}\right.$$

Ответ: $1\leqslant x<5,\ x>11$.

Ответ к варианту *3–2*: $-2\leqslant x<7,\ x>15$.

2. Пусть p,q,r — объемы малины в одном литре (процентное содержание) растворов в первой, второй и третьей бочках соответственно. Заметим, что $0\leqslant p,q,r\leqslant 1$. Планы Незнайки означают

$$\left\{\begin{array}{ll}p+2q+3r=6\cdot 0,1 & \Rightarrow p+q+r=0,6=3\cdot 0,2.\\ 5p+4q+3r=12\cdot 0,25. &\end{array}\right.$$

Далее, умножая первое уравнение на 5, и вычитая из полученного второе, получаем $6q+12r=0\Rightarrow q=r=0$.

Ответ: 20%; 0. Ответ к варианту *3–2*: 25%, 0.

3. Построим на AC такую точку D, что $BD=DC$. Тогда $\triangle BDC$ — равнобедренный, и угол $\angle ABD=\angle ABC-\angle ACB$. Обозначив $BD=DC=x$, получим $AD=5-x$. Тогда из теоремы косинусов в $\triangle ABD$ получим:

$$(5-x)^2=4^2+x^2-2\cdot 4x\cos(\angle ABD)\Longleftrightarrow 25-10x=16-8x\cdot\frac{11}{16}\Longleftrightarrow x=2.$$

Теперь в $\triangle ABD$ известны все стороны, и его площадь находится по формуле Герона: $S_{ABD}=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. После этого

$$S_{ABC}=S_{ABD}\cdot\frac{AC}{AD}=\frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $5\sqrt{15}/4$.

Ответ к варианту *3–2*: $15\sqrt{15}/8$.

4. Так как

$$f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{n^2}{1+n^2}-\frac{1/n^2}{1+1/n^2}=-\frac{n^2+1}{1+n^2}=-1,$$

то исходная сумма равна

$$f(1)+\sum_{k=2}^{2018}\left(f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right)\right)=-\frac{1}{1+1}-2017=-2017,5.$$

Ответ: $-2017,5$.

Ответ к варианту: *3–2*: $2017,5$.

5. Так как $a^2\cos^4 t+1\geqslant 2|a|\cos^2 t$ (причём знак равно достигается при $|a|\cos^2 t=1$, если $|a|\geqslant 1$), то

$$(\cos^4 x+1)(4\cos^4 y+1)\geqslant 8\cos^2 x\cos^2 y\geqslant 8\cos^3 x\cos^2 y.$$

Поэтому имеет место равенство как в первых двух неравенствах (отсюда $\cos^4 x=1$ и $2\cos^2 y=1$), так и в последнем (отсюда $\cos^2 x=\cos^3 x$). Значит, $\cos x=1$, $\cos y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. В указанные интервалы попадают значения: $x=2\pi$, $y=3\pi/4$ и $y=5\pi/4$. Наименьшее значение модуля разности: $3\pi/4$.

Ответ: $3\pi/4$.

Ответ к варианту *3–2*: $7\pi/4$.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–1** (Уфа)*

1. Решите уравнение

$$\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot x+\pi=2\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

2. Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе — 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 7 раз больше прежней, тогда как доля другого — в 3 раза меньше прежней?

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 2\cos^3 3x.$$

4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle ABD=\angle CBD=40^\circ$, $\angle ACD=20^\circ$, $\angle CAD=30^\circ$. Найдите:

а) углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, если $BC=3$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a4^{\frac{1}{x}-1}+(a-1)2^{\frac{1}{x}}-a^3+3a-2=0$$

не имеет корней.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–2** (Уфа)*

1. Решите уравнение

$$2\operatorname{arctg}5+\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\left(\arcsin\frac{4}{5}-\arccos\frac{3}{5}\right)\cdot x+\pi.$$

2. Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе — 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 4 раза больше прежней, тогда как доля другого — в 4 раза меньше прежней?

3. Решите неравенство

$$3\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 2\sin^3 3x.$$

4. Внутри треугольника KLM взята такая точка N, что $\angle MKN=\angle LKN=50^\circ$, $\angle MLN=10^\circ$, $\angle LMN=30^\circ$. Найдите:

а) углы $\angle KLN$ и $\angle KMN$;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников KLM и KLN, если $KL=\sqrt{3}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)4^{\frac{1}{x}+2}+a2^{\frac{1}{x}+3}-a^3-3a^2=0$$

имеет хотя бы один корень.

март 2018 г.

*Ответы и решения к варианту **4–1** (2)*

1. Поскольку $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$ и

$$2\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{3+3}{1-3\cdot 3}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\pi,$$

то исходное уравнение равносильно $0\cdot x=0$.

Ответ: $x\in\mathbb{R}$.

Ответ к варианту *8–2*: $x\in\mathbb{R}$.

2. Доля второго уменьшилась в 3 раза при неизменной его сумме денег, поэтому общая сумма увеличилась в 3 раза, а значит, первый внес еще 2 млн руб. Обозначив его общую сумму денег через x (млн руб.), получаем

$$\frac{x}{3}=7\cdot\frac{x-2}{1}\Rightarrow x=2{,}1.$$

Ответ: 2,1 млн руб.

Ответ к варианту *8–2*: 3,2 млн руб.

3. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{ctg}^2x\geqslant 2$, причём равенство возможно только если $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2x=3\operatorname{ctg}^2x\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. При этом $2\cos^3 3x\leqslant 2$, причём равенство возможно только если $x=\frac{2\pi m}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$. Найденные серии пересекаются по множеству $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ к варианту *8–2*: $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение варианта 8–2.

Нужно пересечь серии $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$.

4. а) Точка B определяется точками A, C, D однозначно (из неё оба отрезка AD, CD видны под углом 40°), причём заведомо годится такая точка B, что окружность с центром D, касающаяся стороны AC, вписана в угол ABC (то есть вписана в треугольник ABC). Значит, это и есть та самая точка. Следовательно, $\angle BAD=\angle CAD=30^\circ$ и $\angle BCD=\angle ACD=20^\circ$.

б) Радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ}=\frac{3}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$. Но $\angle BDC=180^\circ-40^\circ-20^\circ=120^\circ$, поэтому радиус окружности, описанной вокруг треугольника BCD, также равен $\frac{BC}{2\sin 120^\circ}=\sqrt{3}$. Значит, их общая хорда BC пересекает отрезок между центрами в его середине, а длина этого отрезка равна $2\sqrt{3-\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$.

Ответ: а) 30° и 20°; б) $\sqrt{3}$.

Ответ к варианту *8–2*: а) 10° и 30°; б) 1.

5. Относительно переменной $t=2^{\frac{1}{x}-1}$ уравнение принимает вид

$$at^2+2(a-1)t-a^3+3a-2=0.$$

Функция $f(x)=2^{\frac{1}{x}-1}$ принимает все положительные значения, кроме $\frac{1}{2}$. Поэтому исходное уравнение не имеет корней, если корни уравнения относительно t не принадлежат множеству $(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$. При $a=0$ имеем $t=-1$, поэтому такое a подходит. При $a\neq 0$ это квадратное уравнение, корни которого равны $t_1=a-1$, $t_2=-\frac{(a-1)(a+2)}{a}$. Находим множество значений a, при которых $t_1,t_2\in(-\infty;0]\cup\{\frac{1}{2}\}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a-1\leqslant 0,\\ a-1=\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-\frac{(a-1)(a+2)}{a}\leqslant 0,\\ -\frac{(a-1)(a+2)}{a}=\frac{1}{2},\end{array}\right.\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a\leqslant 1,\\ a=\frac{3}{2},\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a\geqslant 1,\\ -2\leqslant a<0,\\ a=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4},\end{array}\right.\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}-2\leqslant a<0,\\ a=1,\\ a=\frac{3}{2},\\ a=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $-2\leqslant a\leqslant 0$, $a=1;\frac{3}{2};\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$.

Ответ к варианту *8–2*: Дополнение к множеству $\{a\in\mathbb{R}:\ a\in[-3;-1)\cup\{0;4;\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}\}\}$.

Решение варианта 8–2. Уравнение

$$(a+1)t^2+2at-a^3-3a^2=0$$

должно иметь хотя бы один корень в множестве значений функции $f(x)=2^{\frac{1}{x}+2}$, т. е. в $(0;4)\cup(4;+\infty)$. При $a=-1$ оно имеет корень $t=-1$. При $a\neq -1$ его корни равны $t_1=a$, $t_2=-\frac{a(a+3)}{a+1}$.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Железноводск)*

1. Решите уравнение
$$\lg\left(-x^3-x\right)=\log_2|x|\,.$$

2. На выборах кандидат получил от $50,332\%$ до $50,333\%$ голосов. Какое при этом могло быть наименьшее число избирателей?

3. Решите уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+...+\frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}}=42.$$

4. Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F, соответственно. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AC=b$ и $\angle ABC=\beta$.

5. Найдите все значения a, при каждом их которых неравенство
$$(x+\log_4|a|)(x+\log_{|a|}4)(x^2+10\cdot 2^a x+a^2-3)\geqslant 0$$
выполняется для любого x.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Железноводск)*

1. Решите уравнение
$$\log_{30}\left|x^3+x\right|=\log_3(-x).$$

2. На выборах кандидат получил от $50,439\%$ до $50,44\%$ голосов. Какое при этом могло быть наименьшее число избирателей?

3. Решите уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}}+...+\frac{1}{\sqrt{x+2018}+\sqrt{x+2019}}=42.$$

4. Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F соответственно. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AB=c$ и $\angle ACB=\gamma$.

5. Найдите все значения a, при каждом их которых неравенство
$$(x-\log_4|a|)(x-\log_{|a|}4)(x^2-10\cdot 2^{-a}x+a^2-3)\geqslant 0$$
выполняется для любого x.

март 2018 г.

*Ответы и решения к варианту **5–1** (2)*

1. Так как $0 < -x^3 - x = -x(x^2+1)$, то $x < 0$. Положим $\lg\left((-x)^3 + (-x)\right) = \log_2(-x) = t$. Тогда

$$\begin{cases} -x = 2^t, \\ (-x)^3 + (-x) = 10^t \end{cases} \Leftrightarrow 8^t + 2^t = 10^t \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^t = \left(\frac{5}{4}\right)^t.$$

Слева убывающая функция, а справа возрастающая. Единственное решение $t = 1$. **Ответ:** $x = -2$. Ответ к варианту *5–2*: $x = -3$.

2. Пусть было n избирателей, и за данного кандидата отдано k голосов. Тогда $0,50332 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 0,50333$, и $1,00664 \leqslant \frac{2k}{n} \leqslant 1,00666$. Если обозначить $m = 2k - n$, то $0,00664 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 0,00666$.

- Если $m = 1$, то $150,1 < \frac{1}{0,00666} \leqslant n \leqslant \frac{1}{0,00664} < 150,7$ — нет целых решений.
- Если $m = 2$, то $300 < \frac{2}{0,00666} \leqslant n \leqslant \frac{2}{0,00664} < 302$. Но если $n = 301$ и $m = 2$, то соответствующего значения k не существует.
- Если $m = 3$, то $450 < \frac{3}{0,00666} \leqslant n \leqslant \frac{3}{0,00664} < 452$. Значит, $n = 451$, $k = 227$, и все неравенства выполняются.

Ответ: 451. Ответ к варианту: *5–2*: 341.

3. Имеем

$$42 = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}} \equiv$$
$$\equiv \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right) + \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}\right) + \ldots \left(\sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2017}\right) \equiv$$
$$\equiv \sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 42(\sqrt{x+2018} + \sqrt{x+2}) = 2018 - 2 \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: $x = 7$. Ответ к варианту *5–2*: $x = 6$.

4. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $\varphi = \angle DEC = \angle CEG$; $G, H-$ точки, симметричные точке D относительно AC и AB соответственно (см. рис. 1). Точки A, D, C и G лежат на окружности с диаметром AC. Так как $\angle GDC = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $\angle AGH = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то

$$\varphi = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - (\alpha + \gamma) = \beta.$$

Поэтому $\angle CDE = \alpha$.

Если BQ – высота треугольника ABC, то углы треугольника DQC равны α, β, γ (см. рис. 2), значит $\triangle DQC = \triangle DEC$, т.е. $E = Q$ и $BE-$высота треугольника ABC. Если P —точка пересечения высот AD и BQ, то $BP = b \cdot ctg\beta$.

Ответ: $b \cdot ctg\beta$. Ответ к варианту *5–2*: $c \cdot ctg\gamma$.

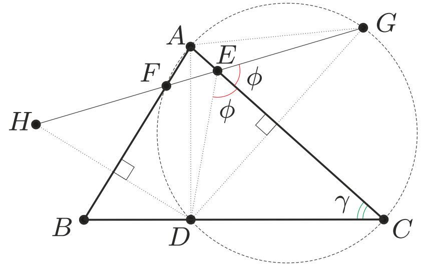

Рис. 1:

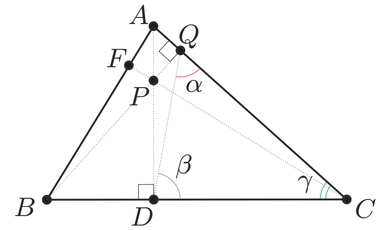

Рис. 2:

5. Пусть $g(x) = (x + \log_4|a|)(x + \log_{|a|}4)$, $h(x) = x^2 + 10 \cdot 2^a x + a^2 - 3$ и $d_h(a)$ — четверть дискриминанта квадратного трёхчлена $h(x)$. Неравенство выполняется для всех x тогда и только тогда, когда:

а) корни $g(x)$ совпадают, а а корни $h(x)$ или отсутствуют, или совпадают;

б) пара корней $g(x)$ совпадает с парой корней $h(x)$.

Условия пункта а) означают: $\log_4|a| = \log_{|a|}4$, $d_h(a) \leqslant 0$. Решая уравнение, получаем $\log_4|a| = \log_{|a|}4 \Leftrightarrow (\log_4|a|)^2 = 1$.

Если $\log_4|a| = 1 \Leftrightarrow |a| = 4$, то или $a = 4$ и $d_h(4) = (5 \cdot 16)^2 - 13 > 0$, или $a = -4$ и $d_h(-4) = (5/16)^2 - 13 < 0$.

Если $\log_4|a| = -1 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{4}$, то свободный член $h(x)$ равен $a^2 - 3 = \frac{1}{16} - 3 = -\frac{47}{16} < 0$, поэтому $h(x)$ имеет два различных корня.

Условия пункта б) означают, что $h(x) = g(x)$. Поэтому

$$\begin{cases} a^2 - 3 = \log_4|a| \cdot \log_{|a|}4 \equiv 1, \\ 10 \cdot 2^a = \log_4|a| + \log_{|a|}4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы означает, что $a^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow |a| = 2$, и тогда

$$\log_4|a| + \log_{|a|}4 = 10 \cdot 2^a = \frac{5}{2}.$$

Последнее равенство выполняется только при $a = -2$.

Ответ: $a = -4$; $a = -2$. Ответ к варианту *5–2*: $a = 4$; $a = 2$.

март 2018 г.