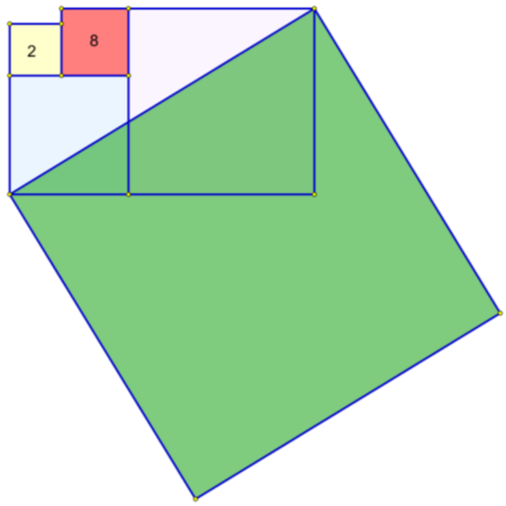
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 9 класса

1. Капитан Джек-Воробей нашел пещеру с пиратским кладом. В ней стоит 6 сундуков, причем клад есть только в одном из них, а в остальных сундуках живут ядовитые змеи, готовые наброситься на каждого, кто потревожит их покой.
   На первом сундуке написано «Клад в третьем сундуке».
   На втором «Клад во мне или в первом сундуке».
   На третьем «Во мне клада нет».
   На четвертом «Клад лежит в сундуке с нечетным номером».
   На пятом «Во втором и шестом сундуке клада нет».
   На шестом «В четвертом сундуке клада нет».
   Помогите Джеку найти клад, если известно, что ровно половина надписей – истинна. В ответе укажите номер сундука с кладом.
   ОТВЕТ: 2.
   Решение: *см. зад 1 для 5-6 класса.*
2. На рисунке изображено 5 квадратов, площадь желтого равна 2 кв.см., площадь красного – 8 кв. см. Найдите площадь зеленого квадрата.
   ОТВЕТ: 178.
   Решение: *см. зад. 3 для 7-8 класса.*



3. Сумма 1928 натуральных чисел равна 2016, а произведение - 1001. Найдите эти числа. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из этих чисел.
   ОТВЕТ: 78.
   Решение: *см. зад. 4 для 5-6 класса.*
4. Известно, что $a < b < c$. Какие из нижеследующих утверждений невозможны? В ответе приведите номера в порядке возрастания (без пробелов):
   1) $a^{2016} > b^{2016} > c^{2016}$ 2) $a^{2016} = b^{2016} < c^{2016}$; 3) $a^{2016} < b^{2016} = c^{2016}$; 4) $a^{2016} < c^{2016} < b^{2016}$; 5) $b^{2015} < a^{2016} < c^{2016}$
   ОТВЕТ: 34.
   Решение: *см. зад. 5 для 7-8 класса.*
5. Коля купил 14 карандашей и 3 ластика за 107 рублей. Цена карандаша отличается от цены ластика не более, чем на 5 рублей, причем оба предмета стоят целое число рублей. Петя купил 1 ластик и 1 карандаш, сколько он заплатил?
   ОТВЕТ: 10.
   Решение: *см. зад. 5 для 5-6 класса.*

6. На числовой прямой отмечены точки с координатами 0, 1, 2, 3, 5, 8, 2016. Рассматривается множество длин отрезков с концами в этих точках. Сколько элементов оно содержит?

   ОТВЕТ: 14.

   Решение: *см. зад 6 для 5-6 класса.*

7. Натуральное число *N* оканчивается на …70, при этом имеет ровно 72 натуральных делителя (включая 1 и само себя). Сколько будет натуральных делителей у числа 80*N*?

   ОТВЕТ: 324.

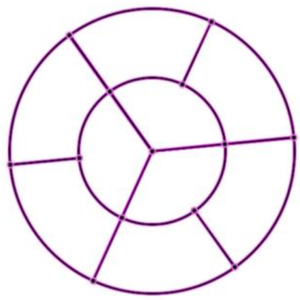
   Решение: Каждый делитель числа N можно представить в виде $2^a \cdot 5^b \cdot q$, где q не кратно 2 и 5, а числа *a,b* равны 0 или 1. Следовательно, имеется всего 4 различные комбинации для пары a и b, а значит возможных значений для q всего 72/4 = 18. Им соответствуют делители числа 80N вида $2^c \cdot 5^d \cdot q$, у которых c=0,…,5 и d =0,1,2. Их 18 для каждого q, т.е. всего 18*18=324.

8. Найдите $\sqrt{\frac{x}{63} - 32} \times \sqrt{\frac{y}{63} - 32}$, если известно, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: 32.

   Решение: *см. зад. 8 для 7-8 класса.*

9. Диск разбит на 9 областей, как показано на рисунке. Сколькими различными способами можно его раскрасить в черный и белый цвета, если каждую область можно красить в любой из цветов. Раскраски, переходящие друг в друга при повороте диска считаются одинаковыми.

   ОТВЕТ: 176.

   Решение: Если не принимать повороты в расчет, то диск можно раскрасить 2^9=512 способами. Заметим, что ровно 8 из них переходят в себя при повороте (у которых в каждом секторе с углом 120^o одинаковая раскраска). Вычтем эти варианты. Каждой из оставшихся 512-8 = 504 раскрасок соответствуют еще две из этого числа, с учетом поворота на 120^o, тем самым, согласно условиям задачи, количество различных раскрасок из этого числа есть 504/3 = 168. Для получения окончательного ответа остается прибавить 8 вычтенных нами в начале раскрасок, откуда количество всех различных способов есть 176.