Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

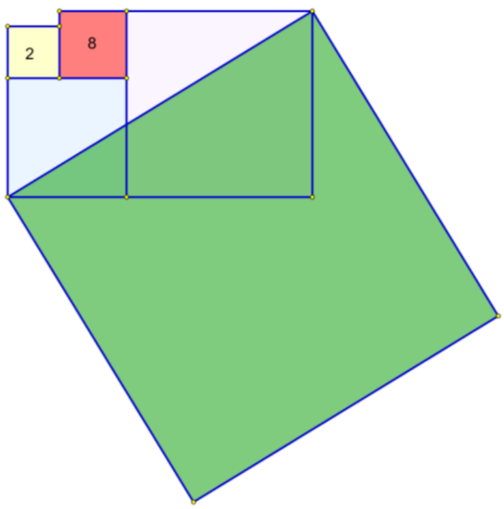
Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 7–8 класса

1. Капитан Джек-Воробей нашел пещеру с пиратским кладом. В ней стоит 6 сундуков, причем клад есть только в одном из них, а в остальных сундуках живут ядовитые змеи, готовые наброситься на каждого, кто потревожит их покой.
На первом сундуке написано «Клад в третьем сундуке».
На втором «Клад во мне или в первом сундуке».
На третьем «Во мне клада нет».
На четвертом «Клад лежит в сундуке с нечетным номером».
На пятом «Во втором и шестом сундуке клада нет».
На шестом «В четвертом сундуке клада нет».
Помогите Джеку найти клад, если известно, что ровно половина надписей – истинна. В ответе укажите номер сундука с кладом.
ОТВЕТ: 2.
Решение: *См. зад.1 для 5-6 классов.*

2. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2017. В ответе укажите первую слева цифру, умноженную на количество цифр.
ОТВЕТ: 225.
Решение: *См. Зад. 2 для 5-6 классов.*

3. На рисунке изображено 5 квадратов, площадь желтого равна 2 кв.см., площадь красного – 8 кв. см. Найдите площадь зеленого квадрата.
ОТВЕТ: 178.
Решение Если взять за а сторону желтого квадрата, тогда сторона красного квадрата – 2а, а сторона зеленого – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5а и 8а, т.е. его площадь равна $25a^2+64a^2=89a^2=178$.



4. Сумма 1928 натуральных чисел равна 2016, а произведение - 1001. Найдите эти числа. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из этих чисел.
ОТВЕТ: 78.
Решение: *см. зад. 4 для 5-6.*

5. Известно, что $a < b < c$. Какие из нижеследующих утверждений невозможны? В ответе приведите номера в порядке возрастания (без пробелов): 1) $a^{2016} > b^{2016} > c^{2016}$ 2) $a^{2016} = b^{2016} < c^{2016}$; 3) $a^{2016} < b^{2016} = c^{2016}$; 4) $a^{2016} < c^{2016} < b^{2016}$; 5) $b^{2015} <$

$a^{2016} < c^{2016}$

ОТВЕТ:34

Решение: *1 возможно (напр. -2 < -1 < 0); 2 возможно (напр. -1, 1 , 2); 3 невозможно, т.к. в этом случае a < b = -c, т.е. |a| > |b|; 4 невозможно, т.к. если* $b \in (a; c)$, *то* $|b| < \max(|a|, |c|)$*; 5 возможно (напр. -2,-1,3).*

6. Коля купил 14 карандашей и 3 ластика за 107 рублей. Цена карандаша отличается от цены ластика не более, чем на 5 рублей, причем оба предмета стоят целое число рублей. Петя купил 1 ластик и 1 карандаш, сколько он заплатил?

   ОТВЕТ: 10.

   Решение: *см. зад.5 для 5-6*

7. На числовой прямой отмечены точки с координатами 0, 1, 2, 3, 5, 8, 2016. Рассматривается множество длин отрезков с концами в этих точках. Сколько элементов оно содержит?

   ОТВЕТ: 14.

   Решение: *см. зад. 6 для 5-6.*

8. Найдите $\sqrt{\frac{x}{63} - 32} \times \sqrt{\frac{y}{63} - 32}$, если известно, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$.

ОТВЕТ: 32.

Решение: Сделаем замену*:* *a*=*x*/63, *b*=*y*/63. Тогда условие перепишем в виде: найдите $\sqrt{(a-32)\cdot(b-32)}$, если известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{32}$, т.е. $ab = 32(a+b)$. Преобразуем: $\sqrt{(a-32)\cdot(b-32)} = \sqrt{ab - 32(a+b) + 1024}$ =32.