Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (5 задач).

Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

---

1. Решите неравенство

$$\frac{2^{\,2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{\,1+\sqrt{x-1}}-8}>1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу (-70;34).

Решение. Обозначив $t=2^{1+\sqrt{x-1}}$, получим

$$\frac{2t-24}{t-8}\geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{t-16}{t-8}\geqslant 0 \Longleftrightarrow t\in(-\infty;8)\cup[16;+\infty).$$

Отсюда либо $2^{1+\sqrt{x-1}}<2^3$, $\sqrt{x-1}<2$, $x\in[1;5)$, либо $2^{1+\sqrt{x-1}}\geqslant 2^4$, $\sqrt{x-1}\geqslant 3$, $x\in[10;+\infty)$. Таким образом, решение неравенства $x\in[1;5)\cup(10;+\infty)$. Искомая сумма

$$1+2+3+4+(10+11+12+\ldots+33)=10+\frac{10+33}{2}\cdot 24=526.$$

□

Ответ: 526.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x+5(x-2\pi)^2\cos x+5x^2+20\pi^2=20\pi x.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;6\pi]$, и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^4 x+5(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0,$$

левая часть которого неотрицательна. Поэтому $\sin x=0$ и $(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0$. Поэтому решение уравнения: $x=2\pi$ и $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. На отрезок $[-\pi;6\pi]$ попадает значения $-\pi$, π, 2π, 3π, 5π, сумма которых равна $10\pi\approx 31,4159\ldots$ В ответ записываем $31,42$.

□

Ответ: $31,42$.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC взята точка M так, что площади треугольников ABM и BCM составляют треть и четверть площади треугольника ABC соответственно. Найти BM, если $AM=60$ и $CM=70$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Решение. Обозначив $AB=c$, $BC=a$, получим

$$\begin{cases} \left(c-\frac{c}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2=60^2,\\ \left(\frac{c}{4}\right)^2+\left(a-\frac{a}{3}\right)^2=70^2. \end{cases}$$

Решаем систему и находим $BM=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{4}\right)^2=\frac{100^2}{7}$. Поэтому $BM=\frac{100}{\sqrt{7}}$. В ответ записываем ближайшее целое.

□

Ответ: 38.

4. Первая бригада рабочих делает асфальт на одном участке дороги, а вторая бригада, в которой на 6 рабочих больше, — на другом, площадь которого втрое больше. Производительность всех рабочих одинакова. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее? Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Если в первой бригаде n рабочих, площадь первого участка равна S, а производительность одного рабочего равна x, то условие задачи запишется в виде $\frac{S}{nx} < \frac{3S}{(n+6)x}$, откуда следует $\frac{1}{n} < \frac{3}{n+6}$, и $n > 3$. Таким образом, наименьшим возможным n является 4. □

Ответ: 4.

5. Найдите все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. При необходимости округлите его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Так как $2y = a - x$, то из первого уравнения получим:

$$x^2 + (a-x)^2 = 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение при $\frac{D}{4} = 2 - a^2 = 0$. Значит, $a = \pm\sqrt{2}$, наименьшее значение равно $-\sqrt{2} \approx -1,414214\ldots$. □

Ответ: $-1,41$.
