
I-A. Сумма 28218 натуральных чисел равна $2016 \cdot 15$, а их произведение — $(2016^2 + 15)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Решение. Из разложения $2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631$ делаем вывод, в задаче

$$\begin{cases} a_1 + \dots + a_{28218} = 2016 \cdot 15; \\ a_1 \cdot \dots \cdot a_{28218} = 2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631 \end{cases}$$

чисел a_k не равных 1 может быть не более 4 (т.е. не более чем количество простых делителей), поэтому задача равносильна следующей

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2026; \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631; \\ a_5 = a_6 = \dots = a_{28218} = 1. \end{cases}$$

Решаем последнюю задачу: Набор a_1, a_2, a_3, a_4 состоит из чисел 1, 19, 113, $3 \cdot 631$.

Остается вычислить $(3 \cdot 631) + 1 = 1894$.

Ответ: 1894.

□

1. Сумма 28218 натуральных чисел равна $2016 \cdot 15$, а их произведение — $(2016^2 + 15)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Ответ 1894.

2. Сумма 1289 натуральных чисел равна $2016 + 19$, а их произведение — $(2016^2 + 19)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 19 = 5^2 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 131$.

Ответ 656.

3. Сумма 16054 натуральных чисел равна $2016 \cdot 9$, а их произведение — $(2016^2 - 9)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 - 9 = 3^2 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 673$.

Ответ 2020.

4. Сумма 50178 натуральных чисел равна $2016 \cdot 27$, а их произведение — $(2016^2 + 27)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 27 = 3^3 \cdot 109 \cdot 1381$.

Ответ 4144.

5. Сумма 1118 натуральных чисел равна $2016 + 44$, а их произведение — $(2016^2 + 44)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 44 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 97 \cdot 419$.

Ответ 839.

6. Сумма 82705 натуральных чисел равна $2016 \cdot 46$, а их произведение — $(2016^2 + 46)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 46 = 2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 4993$.

Ответ 9987.

7. Сумма 8571 натуральных чисел равна $2016 \cdot 6$, а их произведение — $(2016^2 + 6)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 6 = 2 \cdot 3 \cdot 439 \cdot 1543$.

Ответ 3087.

8. Сумма 10780 натуральных чисел равна $2016 \cdot 9$, а их произведение — $(2016^2 + 9)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 9 = 3^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 2441$.

Ответ 7324.

9. Сумма 1265 натуральных чисел равна $2016 + 33$, а их произведение — $(2016^2 + 33)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 33 = 3 \cdot 41 \cdot 173 \cdot 191$.

Ответ 574.

II-A. Решите уравнение

$$(1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x)^4 + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x)^4 = \frac{3}{4} + \frac{\cos 8x}{4}.$$

Найдите сумму всех корней на промежутке A , округлив при необходимости до целого числа. Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

Решение. 1-ый способ решения. Справедливо

$$\begin{aligned} (1 + \cos 4x) + (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x &= \cos 2x (2 \cos 2x + 2 \cos 2x + 1), \\ \sin 2x + \sin 4x + (\sin x + \sin 3x) &= \sin 2x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (2 \cos 2x + 2 \cos 2x + 1)^4 (\cos^4 2x + \sin^4 2x) &= \frac{3}{4} + \frac{1 - 2 \sin^2 4x}{4} \iff \\ (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^4 (\cos^4 2x + \sin^4 2x) &= 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \iff \\ (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^4 \left(1 - \frac{\sin^2 4x}{2}\right) &= 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \iff \\ (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^4 &= 1 \iff \\ 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 &= \pm 1. \end{aligned}$$

Решая квадратные (относительно переменной $\cos x$) уравнения $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0$ и $4 \cos^2 x + 2 \cos x = 0$ приходим к $\cos x = 1/2; -1; 0; -1/2$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2-ый способ решения. Как легко заметить, на множестве $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ решений нет. Рассмотрим все остальные значения $x \in \mathbb{R}$. Уравнение равносильно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2} \cos 2x}{\sin \frac{x}{2}}\right)^4 + \left(\frac{\sin \frac{5x}{2} \sin 2x}{\sin \frac{x}{2}}\right)^4 &= 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \iff \\ \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^4 (\cos^4 2x + \sin^4 2x) &= 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \iff \\ \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^4 \left(1 - \frac{\sin^2 4x}{2}\right) &= 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \iff \\ \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^4 &= 1. \end{aligned}$$

Решим уравнение

$$\sin \frac{5x}{2} = \pm \sin \frac{x}{2} \iff \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2} = \pm \frac{x}{2} + 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = \pi \pm \frac{x}{2} + 2\pi m, \end{array} \iff \left[\begin{array}{l} 3x = 2\pi n, \\ 2x = 2\pi n, \\ 3x = \pi + 2\pi n, \\ 2x = \pi + 2\pi n. \end{array} \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{array} \right.$$

Исходное уравнение на множестве $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 3s, s \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: На множестве $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$. Ответ $\frac{5\pi}{2} + 8\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

□

1. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1009$. Ответ 25367.
2. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1010$. Ответ 25392.
3. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1011$. Ответ 25417.
4. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1012$. Ответ 25442.
5. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1013$. Ответ 25467.
6. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1014$. Ответ 25492.
7. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1015$. Ответ 25518.
8. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1016$. Ответ 25543.
9. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1017$. Ответ 25568.
10. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi], m = 1018$. Ответ 25593.

III-A. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что про неё известно следующее свойство: если к сумме квадратов всех сторон треугольника прибавить утроенную сумму всех квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника, то получится величина, которая не превосходит $24 \cdot x$. Найдите сторону треугольника y , если известно, что площадь треугольника ABC не менее $\sqrt{3} \cdot x$. При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

Решение. Обозначим через C_1 и B_1 проекцию точек C и B на прямую AM . Тогда справедливо:

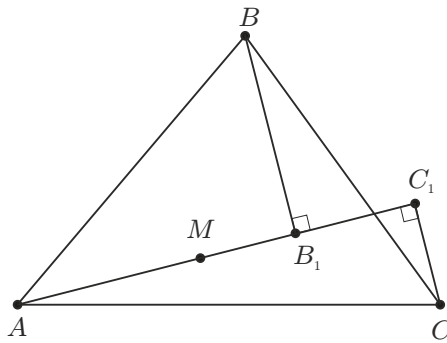


Рис. 1:

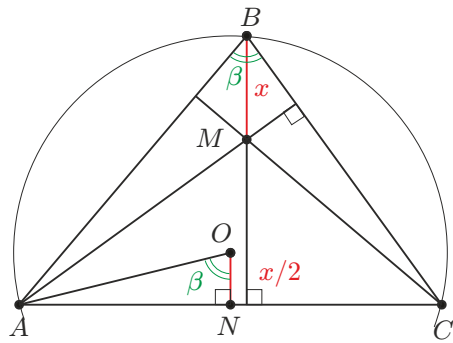


Рис. 2:

$$\begin{aligned} 4(S_{AMB} + S_{AMC}) &= 2 \cdot AM \cdot (BB_1 + CC_1) \leq 2 \cdot AM \cdot BC = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} AM \cdot BC) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 \cdot AM^2 + BC^2). \end{aligned}$$

Аналогично, получаем

$$4(S_{BMC} + S_{BMA}) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 \cdot BM^2 + AC^2),$$

$$4(S_{CMA} + S_{CMB}) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 \cdot CM^2 + AB^2).$$

Таким образом

$$8\sqrt{3}S_{ABC} \leq AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

Докажем, что знак равно в данном неравенстве достигается только в случае правильного треугольника. Для этого докажем, что все углы равны по 60° . Проведём доказательство для угла β (см. рис. 2) и покажем, что $\beta = 60^\circ$. Остальные углы доказываются аналогично. Пусть O — центр описанной окружности вокруг треугольника ABC . Поскольку во всех переходах в неравенствах должен стоять знак равно, то M — точка пересечения высот и

$$AC = BM\sqrt{3} \iff b = \sqrt{3}x.$$

Следовательно из треугольника AON получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AN}{ON} = \frac{b/2}{x/2} = \sqrt{3} \iff \beta = 60^\circ.$$

Но из условия вытекает, что

$$8\sqrt{3}S_{ABC} \geq 24x \geq AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

Следовательно треугольник ABC равносторонний.

Ответ: $2\sqrt{x}$.

□

1. Известно, что $x = 2014$, найдите $y = AC$. Ответ 89.76.
2. Известно, что $x = 2015$, найдите $y = AB$. Ответ 89.78.
3. Известно, что $x = 2013$, найдите $y = BC$. Ответ 89,73.
4. Известно, что $x = 2017$, найдите $y = AC$. Ответ 89.82.
5. Известно, что $x = 2018$, найдите $y = AB$. Ответ 89.84.
6. Известно, что $x = 2019$, найдите $y = BC$. Ответ 89.87.
7. Известно, что $x = 2020$, найдите $y = AC$. Ответ 89.89.
8. Известно, что $x = 2021$, найдите $y = AB$. Ответ 89.91.
9. Известно, что $x = 2022$, найдите $y = BC$. Ответ 89.93.
10. Известно, что $x = 2023$, найдите $y = AC$. Ответ 89.96.
11. Известно, что $x = 2024$, найдите $y = AB$. Ответ 89.98.
12. Известно, что $x = 2026$, найдите $y = BC$. Ответ 90.02.

IV-A. Определим $f(a)$ как функцию, равную количеству различных решений уравнения

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2 + 1} + \cos \frac{\pi(x^2 + 4ax + 1)}{4x^2 + 4} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \quad (1)$$

Например, $f(a_1) = 3$ означает, что при $a = a_1$ это уравнение имеет три различных решения x_1, x_2, x_3 . Если при $a = a_0$ уравнение корней не имеет, то положим $f(a_0) = 0$.

Решите неравенство $f(a) \leq 5$. В ответ запишите суммарную длину получившихся интервалов, округлив ее, при необходимости, до двух знаков после запятой. Если решений нет, то напишите число 0; если получившаяся длина бесконечна, то напишите число 9999.

Решение. Пусть $t = \frac{a\pi x}{x^2+1}$. Тогда уравнение принимает вид $\sin t + \cos(\frac{\pi}{4} + t) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ или

$$\begin{aligned}\sin t + \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \iff \\ 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \iff \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) &= 1.\end{aligned}$$

Из последней формулы видно, что если t заменить на $-t$ количество решений не меняется. Следовательно функция $f(a)$ — чётная.

Решим неравенство $|f(a)| \leq 5$. Последнее неравенство означает, что корней у исходного уравнения должно быть не более 5. Для этого решаем уравнение $\cos(\frac{\pi}{8} - t) = 1$:

$$t = \frac{\pi}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $t = \frac{a\pi x}{x^2+1}$, то

$$x^2 - \frac{a}{2k + 1/8}x + 1 = 0.$$

Отметим, что при различных значениях $b = b_1$ и $b = b_2$ уравнения $x^2 - b_1x + 1 = 0$ и $x^2 - b_2x + 1 = 0$ не имеют общих корней. Действительно, если эти уравнения имеют общий корень, то по теореме Виета совпадут и два других корня, а значит, $b_1 = b_2$. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ решение существует, если $D \geq 0$, причем при $D = 0$ имеется одно решение, при $D > 0$ — два. Условие $D \geq 0$ равносильно

$$\left(\frac{a}{2k + \frac{1}{8}}\right)^2 - 4 \geq 0 \iff |a| \geq \left|2\left(2k + \frac{1}{8}\right)\right|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|a| < \frac{1}{4} &\implies \text{решений нет}, & |a| = \frac{1}{4} &\implies 1 \text{ решение}, \\ |a| \in \left[\frac{1}{4}; \frac{15}{4}\right) &\implies 2 \text{ решения}, & |a| = \frac{15}{4} &\implies 3 \text{ решения}, \\ |a| \in \left[\frac{15}{4}; \frac{17}{4}\right) &\implies 4 \text{ решения}, & |a| = \frac{17}{4} &\implies 5 \text{ решений}, \\ |a| > \frac{17}{4} &\implies \text{более 5 решений}.\end{aligned}$$

Ответ: $a \in [-\frac{17}{4}; \frac{17}{4}]$, длина интервала равна 8,5. □

1. Уравнение:

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2+1} + \cos \frac{\pi(x^2+4ax+1)}{4x^2+4} = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{17}{4}; \frac{17}{4}]$, длина интервала равна 8,5.

2. Уравнение:

$$\cos \frac{a\pi x}{x^2+4} + \sin \frac{\pi(x^2+4ax+4)}{4x^2+16} = \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{31}{2}; \frac{31}{2}]$, длина интервала равна 31.

3. Уравнение:

$$\cos \frac{a\pi x}{x^2+1} + \sin \frac{\pi(x^2-4ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{23}{4}; \frac{23}{4}]$, длина интервала равна 11,5.

4. Уравнение:

$$\sin \frac{2a\pi x}{x^2+1} + \cos \frac{\pi(x^2+8ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{25}{8}; \frac{25}{8}]$, длина интервала равна 6, 25.

5. Уравнение:

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2 + 1} - \cos \frac{\pi(x^2 + 4ax + 1)}{4x^2 + 4} = -\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{19}{4}; \frac{19}{4}]$, длина интервала равна 9, 5.

6. Уравнение:

$$\cos \frac{2a\pi x}{x^2 + 1} - \sin \frac{\pi(x^2 + 8ax + 1)}{4x^2 + 4} = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{29}{8}; \frac{29}{8}]$, длина интервала равна 7, 25.

7. Уравнение:

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2 + 1} + \sin \frac{\pi(x^2 + 4ax + 1)}{4x^2 + 4} = -\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 9$. **Ответ:** $a \in [-\frac{37}{4}; \frac{37}{4}]$, длина интервала равна 18, 5.

8. Уравнение:

$$\cos \frac{a\pi x}{x^2 + 4} - \cos \frac{\pi(x^2 - 4ax + 4)}{4x^2 + 16} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leq 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{21}{2}; \frac{21}{2}]$, длина интервала равна 21.

V-A. Пусть a_n — количество перестановок (k_1, k_2, \dots, k_n) чисел $(1, 2, \dots, n)$ таких, что выполнены два условия:

- $k_1 = 1$;
- Для любого номера $i = 1, 2, \dots, n-1$ выполнено неравенство $|k_i - k_{i+1}| \leq 2$.

Каково число a_N ?

Решение. Докажем в несколько шагов:

Шаг 1. Докажем, что есть рекуррентное соотношение: $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Возможны следующие начала перестановки:

- В последовательности $(1, 2, \dots)$. Отбросим первую единицу, а остальные числа уменьшим на 1. То, что получилось, удовлетворяет условиям на перестановки при $n-1$. Следовательно, таких перестановок a_{n-1} .
- В последовательности $(1, 3, 2, 4, \dots)$. Отбросим первые три члена перестановки $((1, 3, 2))$. Остальные числа уменьшим на три. То, что получилось, удовлетворяет условиям на перестановки при $n-3$. Следовательно, таких перестановок есть a_{n-3} .
- Есть ещё одна перестановка вида $(1, 3, 5, 7, \dots, 6, 4, 2)$. В середине — переход с последнего нечётного числа, не превосходящего n к последнему чётному числу, не превосходящего n . Таким образом, получили

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1. \quad (2)$$

Шаг 2. Вычисляем начальные элементы последовательности

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 1, & a_3 &= 2, & a_4 &= 4, & a_5 &= 6, & a_6 &= 9, & a_7 &= 14, & a_8 &= 21, & a_9 &= 31, \\ a_{10} &= 46, & a_{11} &= 68, & a_{12} &= 100, & a_{13} &= 147, & a_{14} &= 216, & a_{15} &= 317, \\ a_{16} &= 465, & a_{17} &= 682, & a_{18} &= 1000, & a_{19} &= 1466, & a_{20} &= 2149, & a_{21} &= 3150, \\ a_{22} &= 4617, & a_{23} &= 6767, & a_{24} &= 9918, & a_{25} &= 14536, & a_{26} &= 21304, & a_{27} &= 31223, \\ a_{28} &= 45760, & a_{29} &= 67065, & a_{30} &= 98289, & a_{31} &= 144050, & a_{32} &= 211116, & a_{33} &= 309406, \\ a_{34} &= 453457, & a_{35} &= 664574, & a_{36} &= 973981, & a_{37} &= 1427439, & a_{38} &= 2092014, \\ a_{39} &= 3065996, & a_{40} &= 4493436, & a_{41} &= 6585451, & a_{42} &= 9651448, & a_{43} &= 14144885, \\ a_{44} &= 20730337, & a_{45} &= 30381786, & a_{46} &= 44526672, & a_{47} &= 65257010. \end{aligned}$$

Ответ: $a_{41} = 6585451$.

□

1. $N = 41$. Ответ 6585451.
2. $N = 42$. Ответ 9651448.
3. $N = 43$. Ответ 14144885.
4. $N = 44$. Ответ 20730337.
5. $N = 45$. Ответ 30381786.
6. $N = 46$. Ответ 44526672.
7. $N = 34$. Ответ 453457.
8. $N = 35$. Ответ 664574.
9. $N = 36$. Ответ 973981.
10. $N = 37$. Ответ 1427439.
11. $N = 38$. Ответ 2092014.
12. $N = 39$. Ответ 3065996.
13. $N = 40$. Ответ 4493436.