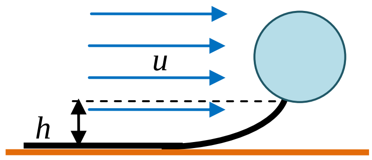
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года
БИЛЕТ № 05 (ЙОШКАР-ОЛА, 10-11 классы): возможные решения.

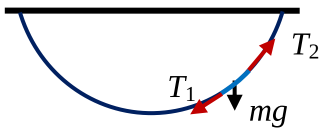
Задание 1:

Вопрос: Массивная цепочка из мелких гладких колечек подвешена за два конца к горизонтальному потолку в однородном поле тяжести. В каких точках сила натяжения цепочки в состоянии покоя максимальна и минимальна? Ответ обосновать.

Задача: Наполненный гелием воздушный шарик почти идеальной сферической формы, если его отпустить в безветренную погоду, будет подниматься вверх со скоростью, постепенно достигающей величины $V = 3$ м/с. Если привязать к нему кусок тонкой гибкой нерастяжимой однородной веревки, то шарик сможет подниматься вверх, если длина куска не превышает $l = 50$ см. К шарику привязали кусок такой же веревки длиной $L = 1{,}5$ м и расстелили нижний конец веревки на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между веревкой и поверхностью $\mu = 0{,}5$. С какой скоростью будет в установившемся режиме двигаться шарик с прикрепленной веревкой при ветре, дующем вдоль поверхности со скоростью $u = 2{,}5$ м/с? На какой высоте h над поверхностью будет двигаться верхний конец веревки? Воздействием ветра на веревку пренебречь. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха.

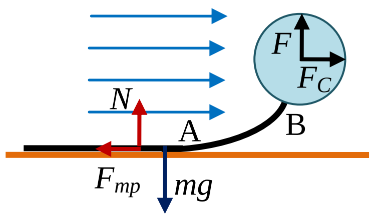


Ответ на вопрос: В состоянии покоя сумма сил, действующих на любой участок цепочки, равна нулю. Выделим небольшой ее участок, на который действуют сила тяжести и две силы натяжения. Как видно, горизонтальные составляющие сил натяжения должны быть равны, а вертикальная составляющая силы натяжения T_2 у верхнего конца участка должна быть больше вертикальной составляющей силы натяжения T_1 у нижнего конца на вес этого участка. Следовательно, $T_2 > T_1$ – сила натяжения растет «снизу вверх». Значит, сила натяжения максимальна в точках подвеса и минимальна в нижней точке цепочки.

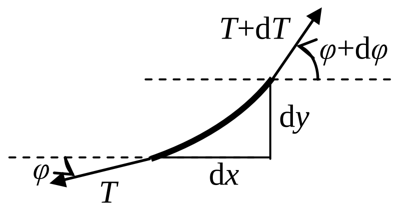


Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть F – подъемная сила шара, равная разности сил Архимеда и веса шара. Тогда вес куска веревки длиной l в точности уравновешивает эту силу. Значит, если m – масса куска веревки длиной L, то $F = \frac{l}{L}mg$. Предельная скорость подъема шарика V соответствует ситуации, когда подъемная сила уравновешивается силой сопротивления воздуха: $F = \frac{l}{L}mg = F_C \equiv \beta V^2 \Rightarrow \beta = \frac{mgl}{LV^2}$. Теперь рассмотрим установившееся движение шарика с веревкой, скользящей по поверхности. Сумма сил, действующих на шарик и веревку, равна нулю, поэтому сила нормальной реакции поверхности $N = mg - F = mg\left(1 - \frac{l}{L}\right)$, а сила трения $F_{mp} = F_C = \beta(u - v)^2$, где v – искомая скорость.



Если $v > 0$ и веревка скользит по поверхности, то $F_{mp} = \mu N$, и поэтому $\beta(u - v)^2 = \mu mg\left(1 - \frac{l}{L}\right)$. С учетом выражения для β находим: $v = u - V\sqrt{\mu\left(\frac{L}{l} - 1\right)}$. Но в нашем случае $u < V\sqrt{\mu\left(\frac{L}{l} - 1\right)} = 3$ м/с. Следовательно, при указанном ветре шарик с веревкой двигаться не будут, и $F_{тр} = \beta u^2 < \mu N$. Если теперь написать условие равновесия только для участка веревки, лежащей на земле, то можно найти силу натяжения веревки в точке А (начало участка веревки, «висящего» над землей): $T_A = F_{тр} = mg\frac{l}{L}\frac{u^2}{V^2}$. Сила натяжения веревки в точке B (точка прикрепления к шарику) $T_B = \sqrt{F^2 + F_C^2} = mg\frac{l}{L}\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}}$. Кроме того, из условия равновесия висящего над землей участка веревки ясно, что длина этого участка равна l. Исследуем изменение силы натяжения на висящем участке веревки. Для этого рассмотрим



равновесие малого элемента веревки длиной dl, наклоненного под углом φ к горизонту, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси x и y:

$$\begin{cases} (T+dT)(\cos\varphi - \sin\varphi d\varphi) - T\cos\varphi = 0 \\ (T+dT)(\sin\varphi + \cos\varphi d\varphi) - T\sin\varphi - mg\dfrac{dl}{L} = 0 \end{cases}$$

После сокращения подобных и пренебрежения квадратами малых величин:

$$\left\{\begin{aligned} dT\cos\varphi - T\sin\varphi d\varphi = 0 \\ dT\sin\varphi + T\cos\varphi d\varphi = mg\frac{dl}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dT = \frac{mg}{L}dl\sin\varphi = \frac{mg}{L}dy.$$

Суммируя малые приращения правой и левой части этого равенства, найдем, что $T_B - T_A = \frac{h}{L}mg$. В результате получаем, что $h = l\left[\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}} - \frac{u^2}{V^2}\right] \approx 26$ см.

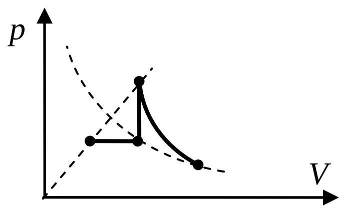
ОТВЕТ: при заданном ветре шарик с веревкой двигаться не будут, $h = l\left[\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}} - \frac{u^2}{V^2}\right] \approx 26$ см.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Чему равна разность теплоемкостей одного моля идеального газа в изобарном и изохорном процессах? Ответ обосновать.

Задача: Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Известно, что при изобарном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 75$ кДж, а в ходе изохорного нагревания температура газа увеличивается в $n = 2$ раза. Найдите работу газа при адиабатическом расширении.

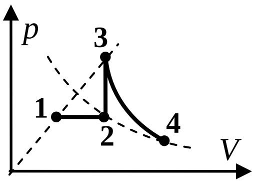


Линии, показанные пунктиром – прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.

Ответ на вопрос: В изохорном процессе работа не совершается, поэтому подводимое к газу тепло расходуется только на изменение его внутренней энергии, которая для одного моля идеального газа зависит только от температуры, поэтому $Q_V = \Delta U = c_V \Delta T$. В изобарном процессе при том же изменении температур газ совершает работу $A = p\Delta V = R\Delta T$, как следует из уравнения Менделеева-Клапейрона. Значит, $Q_p = c_p\Delta T = c_V\Delta T + R\Delta T \Rightarrow c_p - c_V = R$. Итак, разность теплоемкостей одного моля идеального газа в изобарном и изохорном процессах равна универсальной газовой постоянной для любого идеального газа.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34}=A_{34}+\Delta U_{34}=0 \Rightarrow A_{34}=-\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4-T_3=-(T_3-T_2)$, следовательно $A_{34}=\Delta U_{23}=\nu c_V(T_3-T_2)$. С другой стороны, теплота, полученная газом при изобарном нагревании $Q=Q_{12}=\nu(c_V+R)(T_2-T_1)$. С учетом того,



что линия 1-3 проходит через начало координат, $\dfrac{V_3}{V_1}=\dfrac{p_3}{p_1}$, и поэтому $\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{T_3}{T_2}=n$. Значит, $A_{34}=\nu c_V n(T_2-T_1)=n\dfrac{c_V}{c_V+R}Q$. Если ввести обозначение i – число степеней свободы молекулы газа ($i=3{,}5{,}6$ для одноатомного, двухатомного и многоатомного идеального газа соответственно), то $c_V=\dfrac{i}{2}R$, и тогда $A_{34}=n\dfrac{i}{i+2}Q$, то есть $A_{34}=90$ кДж для одноатомного идеального газа, $A_{34}\approx 107{,}1$кДж для двухатомного идеального газа, $A_{34}=112{,}5$кДж для многоатомного идеального газа.

ОТВЕТ: $A_{34}=n\dfrac{i}{i+2}Q=\begin{cases} 90\,\text{кДж} & \text{для одноатомного газа} \\ 107{,}1\,\text{кДж} & \text{для двухатомного газа} \\ 112{,}5\,\text{кДж} & \text{для многоатомного газа} \end{cases}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Какой будет разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора емкостью C, на одну обкладку которого нанесен заряд $+q$, а на другую – заряд $+3q$?

Задача: В плоский воздушный конденсатор емкости C плотно вставили две проводящие пластины одинаковой толщины. Удельное сопротивление материала одной пластины равно ρ_1, а другой – ρ_2. На обкладки конденсатора подали постоянное напряжение U («плюс» источника соединен с обкладкой, с которой контактирует пластина 1). Найти заряд, накопившийся на границе раздела пластин при постоянном токе.

Ответ на вопрос: Поскольку для электростатического поля справедлив принцип суперпозиции, разность потенциалов есть линейная функция зарядов пластин $U(q_1,q_2)=aq_1+bq_2$. Если добавить к этому два требования: изменение знака при «перенумерации» пластин ($U(q_1,q_2)=-U(q_2,q_1)$) и определение емкости ($U(q,-q)=\dfrac{q}{C}$), то эта функция легко устанавливается: $U(q_1,q_2)=\dfrac{q_1-q_2}{2C}\Rightarrow U(3q,q)=\dfrac{q}{C}$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: После вставки пластин конденсатор превращается в пару последовательно соединенных резисторов с сопротивлениями $R_{1,2}=\rho_{1,2}\dfrac{d}{2S}$ (S - площадь сечения пластин, d - расстояние между ними). Напряжение на каждом из резисторов $U_1=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}U=\dfrac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}U$ и аналогично $U_2=\dfrac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}U$. Значит, напряженности электрического поля, создающие ток в каждой из пластин $E_1=\dfrac{2U_1}{d}=\dfrac{2\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\dfrac{U}{d}$ и $E_2=\dfrac{2\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\dfrac{U}{d}$. Эти поля создаются зарядами обкладок и зарядами границы раздела, а их разность связана с поверхностной плотностью заряда на границе раздела $E_2 - E_1 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}\frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, и поэтому заряд границы раздела $q = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}U = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}CU$.

Ответ: $q = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}CU$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: Что нужно сделать для того, чтобы поперечное увеличение перевернутого изображения пламени свечи, наблюдаемого через собирающую тонкую линзу, уменьшилось – придвинуть линзу к свече или отодвинуть от нее? Ответ объяснить.

Задача: Небольшой предмет перемещают вдоль главной оси тонкой линзы. Когда он расположен в точке А, то линза дает прямое изображение с поперечным увеличением $|\Gamma_1| = 2$, а при расположении в точке В – перевернутое изображение с $|\Gamma_2| = 3$. Чему равно увеличение $|\Gamma_3|$, если предмет поместить в точке С, находящейся посередине между точками А и В?

Ответ на вопрос: Пусть a – расстояние от пламени до линзы, а b – от линзы до его изображения. Тогда, согласно формуле линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ (где F – фокусное расстояние), откуда $b = \frac{aF}{a - F}$. Поперечное увеличение изображения $\Gamma = -\frac{b}{a} = \frac{F}{F - a}$ (здесь оно определено так, что является положительным для прямых изображений и отрицательным для обратных). Для собирающей линзы его модуль $|\Gamma| = \frac{F}{|F - a|}$ увеличивается при приближении предмета к ближнему фокусу линзы. Перевернутое изображение наблюдается при $a > F$, поэтому для уменьшения $|\Gamma|$ нужно отодвинуть линзу от свечи.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Отметим, что линза является собирающей, причем точка А находится от линзы на расстоянии a_A, которое меньше фокусного расстояние линзы F, а точка В – на расстоянии $a_B > F$. Увеличение изображения, определенное как в ответе на вопрос – с учетом знака, равно $\Gamma = \frac{F}{F - a}$. Следовательно, $a = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}F$. Поэтому для точек А и В получаем: $\Gamma_1 = |\Gamma_1| \Rightarrow a_A = \frac{|\Gamma_1| - 1}{|\Gamma_1|}F$, $\Gamma_2 = -|\Gamma_2| \Rightarrow a_B = \frac{|\Gamma_2| + 1}{|\Gamma_2|}F$. Так как точка С находится посередине между А и В, то $a_C = \frac{a_A + a_B}{2} = F\left(1 + \frac{|\Gamma_1| - |\Gamma_2|}{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}\right)$. Так как по условию $|\Gamma_1| < |\Gamma_2|$, то $a_C < F$, и изображение для точки С прямое. Значит, $|\Gamma_3| = \Gamma_3 = \frac{F}{F - a_C} = \frac{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}{|\Gamma_2| - |\Gamma_1|} = 12$.

ОТВЕТ: $|\Gamma_3| = \frac{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}{|\Gamma_2| - |\Gamma_1|} = 12$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.