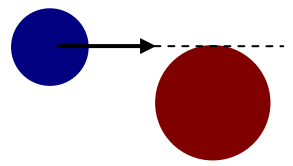
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 06 (МОСКВА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: Гладкая шайба, скользящая по горизонтальной поверхности, столкнулась с такой же (по размеру и массе) покоящейся шайбой. Вектор ее скорости в результате удара повернулся на $30°$. Под каким углом к направлению движения налетающей шайбы направлен вектор скорости другой шайбы после удара?

Задача: Гладкая цилиндрическая шайба покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В нее врезается шайба, изготовленная из того же материала, той же высоты, радиус которой в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем у покоящейся. Линия движения центра налетающей шайбы касается боковой поверхности покоящейся. Под какими углами к направлению движения налетающей шайбы будут двигаться шайбы после упругого удара?

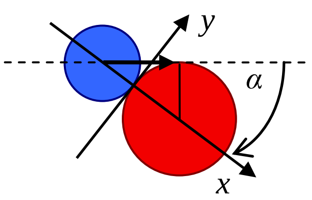


Ответ на вопрос: Будем считать удар упругим. Тогда закон сохранения импульса для двух одинаковых шайб $m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ($\vec{v}_{1,2}$ - скорости налетающей и первоначально покоящейся шайб после удара). Аналогичное сокращение масс произойдет при записи закона сохранения энергии, и поэтому $\vec{v}_0^{\,2} = \vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, то есть скорости шайб после удара перпендикулярны, и искомый угол $\beta = 90° - 30° = 60°$. При частично неупругом ударе угол между векторами скоростей должен быть меньше $90°$, и поэтому $\beta < 60°$. Однако степень неупругости должна быть не слишком велика – иначе угол поворота скорости не сможет быть таким заметным.

Максимальная оценка: 5 баллов.

ПРИМЕЧАНИЕ: В соответствии с указаниями, данными участникам, для зачета вопроса достаточно было разобрать случай упругого соударения.

Решение задачи: Рассмотрим момент соударения шайб. Поскольку сил трения нет, то силы взаимодействия шайб направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения – по оси x (см. рисунок). Поэтому проекции их скоростей на ось $mv_0\cos(\alpha) = mv_x + MV_x$ сохраняются. Заметим, что треугольник, образованный центрами шайб и точки касания линии движения центра налетающей шайбы и боковой поверхности покоящейся, прямоугольный, и его гипотенуза равна сумме радиусов шайб.



Поэтому $\sin(\alpha) = \dfrac{R}{R+r} = \dfrac{n}{n+1}$. Значит, проекции скоростей шайб после удара на ось y: $V_y = 0$, $v_y = v_0\sin(\alpha) = \dfrac{n\,v_0}{n+1}$. Кроме того, отношение масс шайб $\dfrac{M}{m} = n^2$. Поэтому закон сохранения проекции импульса на ось x дает:

$$mv_0\cos(\alpha) = mv_x + MV_x \Rightarrow v_0\cos(\alpha) = v_x + n^2 V_x.$$

Так как энергия движения шайб по оси y не изменилась, то энергия движения по оси x тоже осталась неизменной:

$$\frac{mv_0^2\cos^2(\alpha)}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{MV_x^2}{2} \Rightarrow v_0^2\cos^2(\alpha) = v_x^2 + n^2 V_x^2.$$

Решая полученную систему, и учитывая, что $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$, находим, что $v_x=-\frac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{(n+1)(n^2+1)}v_0$. Следовательно, налетающая шайба после удара движется под углом $\beta=\frac{\pi}{2}+arctg\left(\frac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{n(n^2+1)}\right)$ к оси x (покоящаяся шайба после удара движется по оси x).

Итак: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)=\arcsin(0{,}6)\approx 37^\circ$ к направлению скорости налетающей шайбы. Поскольку $\beta=\frac{\pi}{2}+arctg\left(\frac{20}{39}\right)\approx 117^\circ$, то вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол $\gamma=\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}+arctg\left(\frac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80^\circ$.

Ответ: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin(0{,}6)\approx 37^\circ$ к направлению скорости налетающей шайбы, вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол $\gamma=\frac{\pi}{2}+arctg\left(\frac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80^\circ$ (поскольку калькуляторами на олимпиаде пользоваться не разрешается, явное вычисление числовых значений обратных тригонометрических функций не требовалось).

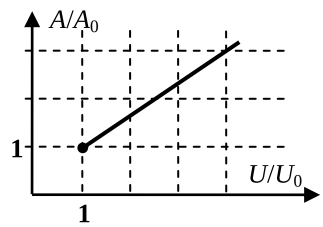
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Как выглядит диаграмма изобарного процесса над одноатомным идеальным газом в координатах $A-U$ («совершенная газом работа – внутренняя энергия»), выходящая из точки (A_0, U_0)?

Задача: Давление одного моля одноатомного идеального газа изохорически изменили от начального до некоторого значения. Затем изобарически уменьшили объем газа в $n=3$ раза. После этого газ изохорически перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k=1{,}2$ раза превышает его температуру в начальном состоянии и что полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найти отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе.

Ответ на вопрос: Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U=\frac{3}{2}pV$. Работа в изобарном процессе $A=p\Delta V=\Delta(pV)=\frac{2}{3}\Delta U$, поэтому уравнение диаграммы этого процесса можно записать как $A=A_0+\frac{2}{3}(U-U_0)$ (см. рисунок).



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть p_0 и V_0 - начальные значения давления и объема, p_1 - промежуточное значение давления, а p_2 - конечное. В соответствие с уравнением состояния и данными задачи:

$$\left.\begin{cases} V_2 = V_1 = \dfrac{V_0}{n} \\ p_2 V_2 = RT_2 = kRT_0 = k \cdot p_0 V_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow p_2 = kn \cdot p_0 > p_0 .$$

Кроме того, поскольку во всем процессе работа совершается только при изобарическом сжатии $A = p_1\left(\dfrac{V_0}{n} - V_0\right) = -\dfrac{n-1}{n} p_1 V_0$, а изменение внутренней энергии $\Delta U = \dfrac{3}{2}(p_2V_2 - p_0V_0) = \dfrac{3}{2}(k-1)p_0V_0$. Значит, в соответствии с первым началом термодинамики $Q = -p_1 \dfrac{n-1}{n} V_0 + \dfrac{3}{2}(k-1)p_0V_0 = 0$, то есть $p_1 = \dfrac{3n}{2(n-1)}(k-1)p_0 < p_0$.

Значит, $\dfrac{p_{\max}}{p_{\min}} = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$.

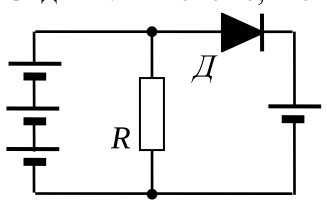
Ответ: $\dfrac{p_{\max}}{p_{\min}} = \dfrac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$.

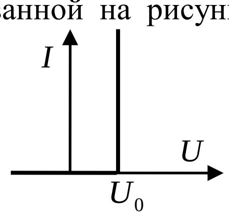
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Резистор и идеальный диод соединены последовательно и подключены к полюсам источника, величина напряжения которого остается постоянной, а полярность изменяется на противоположную каждую секунду. Как изменится тепло, выделяющееся в резисторе за 10 секунд, если его с тем же диодом подключить к полюсам этого источника параллельно?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Все источники одинаковы, их внутреннее сопротивление равно r, а сопротивление резистора $R = 2r$. Найдите зависимость мощности тепловыделения в резисторе от величины ЭДС источников. Пороговое напряжение диода U_0 считать известным.





Ответ на вопрос: При последовательном подключении ток через резистор течет только в той половине каждого периода (равного 2 с), когда диод открыт, а при параллельном подключении – только когда диод заперт (сопротивление идеального диода в открытом состоянии равно нулю). Величина этого тока в обоих случаях равна частному от деления напряжения источника на сопротивление резистора. Поэтому средняя мощность тепловых потерь за период и количество тепла, выделяющегося за 5 полных периодов, не изменятся.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В этой схеме возможны два состояния диода: он может быть открыт либо заперт. Рассмотрим сначала ситуацию, когда диод заперт. В этом случае ток в ветви с диодом отсутствует, а ток через резистор $I = \dfrac{3\mathrm{E}}{R+3r} = \dfrac{3\mathrm{E}}{5r}$ (E – величина ЭДС источников). Следовательно, мощность тепловыделения в резисторе $P = \left(\dfrac{3\mathrm{E}}{5r}\right)^2 R = \dfrac{18\,\mathrm{E}^2}{25r}$. Для того, чтобы диод действительно был заперт, напряжение на резисторе должно удовлетворять требованию $IR = \dfrac{6}{5}\mathrm{E} \le \mathrm{E} + U_0 \Rightarrow \mathrm{E} \le 5U_0$. При $\mathrm{E} > 5U_0$ диод открыт, и через него течет некоторый ток I_1. Тогда (в силу непрерывности тока) в ветви с тремя источниками должен течь ток $I + I_1$, поэтому для этого состояния диода:

$$\left.\begin{cases} IR = U_0 + \mathrm{E} + I_1 r \\ IR = 3\mathrm{E} - (I + I_1)3r \end{cases}\right\} \Rightarrow I = \frac{3(2\mathrm{E} + U_0)}{11r} \Rightarrow P = \frac{18(2\mathrm{E} + U_0)^2}{121r}.$$

Ответ: $P = \begin{cases} \dfrac{18\,\mathrm{E}^2}{25r}, & \mathrm{E} \le 5U_0 \\ \dfrac{18(2\mathrm{E} + U_0)^2}{121r}, & \mathrm{E} > 5U_0 \end{cases}.$

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: Чему может быть равно увеличение (отношение размера изображения к размеру предмета), даваемое тонкой рассеивающей линзой?

Задача: Точечный источник света размещен на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы. Расстояние между источником и его изображением равно L_1. Если передвинуть источник в точку, где находится его изображение, то изображение сместится в ту же сторону на расстояние L_2. Найти оптическую силу линзы (напомним, что у рассеивающей линзы она считается отрицательной).

Ответ на вопрос: Согласно формуле тонкой линзы, расстояние от изображения до линзы b связано с расстоянием от предмета до линзы: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a - F}$. Для поперечного увеличения $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a} = \frac{F}{F - a}$. У рассеивающей линзы фокусное расстояние считается отрицательным, и поэтому $\Gamma_\perp = \frac{|F|}{|F| + a}$. Как видно, поперечное увеличение тонкой рассеивающей линзы для любого действительного объекта положительно (изображение всегда прямое) и меньше 1.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть a - расстояние до линзы от первоначального положения источника. Линза рассеивающая, поэтому расположенное на расстоянии L_1 от источника изображение – мнимое, поэтому расстояние от изображения до линзы следует считать отрицательным (пусть оно будет $-b$). Тогда $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{|F|}$. Аналогично обозначая расстояние от второго изображения до линзы $-c$, получим уравнение $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = -\frac{1}{|F|}$. Кроме того, очевидно $L_1 = a - b$, $L_2 = b - c$. Решая полученную систему, находим: $D = -\frac{1}{|F|} = -\frac{(L_1 - L_2)^2}{2L_1L_2(L_1 + L_2)}$.

Ответ: $D = -\frac{(L_1 - L_2)^2}{2L_1L_2(L_1 + L_2)}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.