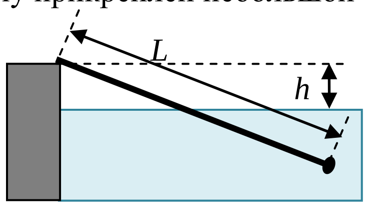
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года
БИЛЕТ № 01 (УФА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: От каких факторов зависит величина, точка приложения и направление силы Архимеда? Приведите примеры ситуаций, когда ее направление не совпадает с вертикалью. Может ли сила Архимеда сообщить очень легкому телу в покоящейся жидкости ускорение, превышающее ускорение свободного падения? Ответ объяснить.

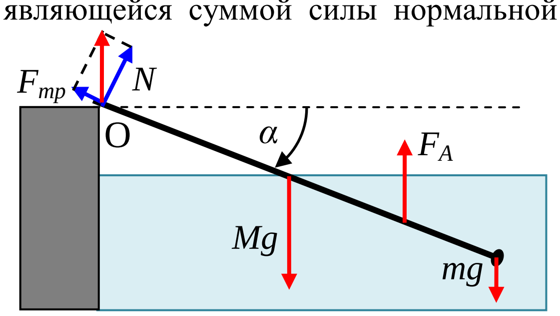
Задача: Узкая тонкая однородная доска длиной $L = 1$ м лежит, опираясь одним из концов на борт бассейна. При этом второй конец доски опущен в воду, и к нему прикреплен небольшой груз (см. рис.). Высота борта над водой $h = 40$ см. Коэффициент трения между доской и бортом бассейна $\mu = 0{,}75$. При каком максимальном отношении массы груза к массе доски $x \equiv \dfrac{m}{M}$ доска может покоиться? Вода в бассейне неподвижна, плотность воды $\rho_0 = 1\,\text{г/см}^3$, плотность дерева, из которого изготовлена доска $\rho = 0{,}5\,\text{г/см}^3$.



Ответ на вопрос: Согласно закону Архимеда, величина силы Архимеда равна весу вытесненной телом жидкости (важно отметить, что вес может создаваться не только силой тяжести – это сила, с которой жидкость, находившаяся на месте тела, действовала бы на окружающую тело жидкость). Точка приложения силы Архимеда тоже совпадает с точкой приложения веса вытесненной жидкости, а направление – противоположно: F_A направлена перпендикулярно поверхностям постоянного давления в жидкости. Закон Архимеда относится к равновесию тела в жидкости – если тело движется с ускорением, то и величина силы Архимеда изменяется. В частности, даже очень легкому телу в покоящейся жидкости сила Архимеда не может сообщить ускорение, превышающее ускорение свободного падения: в самом деле, всплытие легкого тела происходит за счет выталкивающего действия жидкости, которая опускается под действием силы тяжести, и поэтому не может перемещаться с ускорением, превышающим g.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Доска может покоиться под действием силы тяжести, веса груза, силы Архимеда и силы взаимодействия с бортом бассейна, являющейся суммой силы нормальной реакции борта и силы трения (см. рис.). Если α - угол наклона доски к горизонтали, то равенство нулю суммы горизонтальных проекций сил дает $N\sin(\alpha) = F_{тр}\cos(\alpha) \Rightarrow F_{тр} = N \cdot tg(\alpha)$. Так как сила трения покоя $F_{тр} \le \mu N$, то доска может покоиться только при $tg(\alpha) \le \mu$. С другой стороны, угол α должен удовлетворять уравнению моментов относительно точки опоры доски O: $+F_A\left(L - \dfrac{L'}{2}\right)\cos(\alpha) - Mg\dfrac{L}{2}\cos(\alpha) - mgL\cos(\alpha) = 0$, где $L' = L - \dfrac{h}{\sin(\alpha)}$ – длина погруженной в воду части доски, и сила Архимеда $F_A = \rho_0 V_{погр} g = \rho_0 g \dfrac{L'}{L}\dfrac{M}{\rho} = \dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{L'}{L}Mg$.



Таким образом, $\dfrac{Mg}{2L}\left[\dfrac{\rho_0}{\rho}\left(L^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2(\alpha)}\right) - L^2\right] - mgL = 0$, и из этого соотношения находится связь массы груза с углом наклона доски в равновесии: $m = \dfrac{M}{2}\left[\dfrac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \dfrac{h^2}{L^2\sin^2(\alpha)}\right) - 1\right]$. Как видно, максимальная возможная масса груза соответствует максимальному возможному углу $\alpha_{\max} = arctg(\mu) \Rightarrow \sin^2(\alpha_{\max}) = \dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}$, и поэтому $x_{\max} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \dfrac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2 L^2}\right) - 1\right] = \dfrac{1}{18}$.

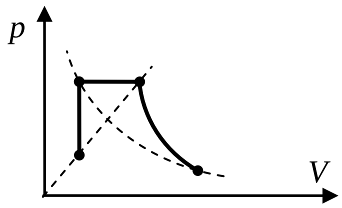
ОТВЕТ: $x_{\max} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \dfrac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2 L^2}\right) - 1\right] = \dfrac{1}{18} \approx 0{,}056$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Чему может быть равна теплоемкость одного моля идеального газа в изохорном и изобарном процессах?

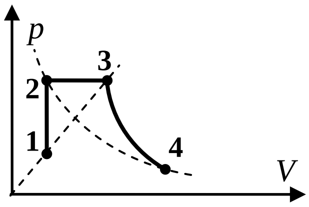
Задача: Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Известно, что при изохорном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 60$ кДж, а после изобарного расширения температура газа становится в $n = 9$ раз больше наименьшей (для всего процесса). Найдите работу газа при адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром – прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.



Ответ на вопрос: Теплоемкость идеального газа в изохорном процессе определяется только изменением его внутренней энергии, поэтому $c_V = \dfrac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы молекулы: $i = 3$ для одноатомного идеального газа, $i = 5$ для двухатомного, $i = 6$ для многоатомного. В изобарном процессе теплоемкость увеличивается за счет совершаемой газом работы, поэтому $c_p = c_V + R = \dfrac{i+2}{2}R$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0 \Rightarrow A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, и поэтому $A_{34} = \Delta U_{23} = \dfrac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2)$. С другой стороны, теплота, полученная газом при изохорном нагревании $Q = Q_{12} = \dfrac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. С учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{p_3}{p_1} \equiv k$, поэтому $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_2} = k$. Кроме того, ясно, что минимальная температура в процессе – это T_1. Поэтому $\dfrac{T_3}{T_1} = n = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{n}$. Таким образом, $\dfrac{A_{34}}{Q} = \dfrac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = \dfrac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \sqrt{n}$, и $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.



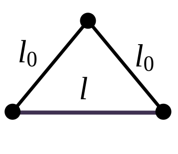
ОТВЕТ: $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.

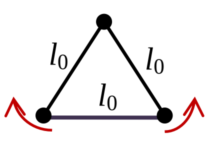
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Чему равна потенциальная энергия электростатического взаимодействия четырех одинаковых точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a?

Задача: Три маленьких одинаковых заряженных шайбы соединены попарно двумя легкими нерастяжимыми нитями длиной $l_0 = 40$ см и одной упругой резинкой, длина которой в



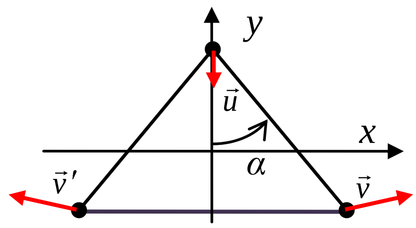


недеформированном состоянии также равна l_0 (сила упругости резинки пропорциональна деформации). Если поместить их на гладкую горизонтальную поверхность, то в состоянии покоя длина резинки будет равна $l = 50$ см. Удерживая шайбы, резинку переводят в недеформированное состояние (так, что шайбы образуют равносторонний треугольник) и отпускают шайбы без начальной скорости. До какой максимальной длины растянется резинка в ходе дальнейшего движения? Какой будет максимальная скорость «средней» шайбы? Циклическая частота колебаний одной шайбы на резинке равна $\omega = 20$ с$^{-1}$.

Ответ на вопрос: Потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого, поэтому сначала необходимо определить ее однозначно: как это обычно делается для системы зарядов конечных размеров, будем считать, что нулевая потенциальная энергия отвечает разнесению всех зарядов на бесконечность. Тогда потенциальная энергия взаимодействия каждой пары зарядов равна $U_{ij} = \dfrac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$. В квадрате есть 4 пары зарядов на расстоянии a, и 2 пары – на расстоянии $a\sqrt{2}$. Значит, полная энергия взаимодействия $U = 4\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + 2\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \dfrac{(4+\sqrt{2})q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В состоянии покоя силы электростатического отталкивания каждой пары шайб уравновешиваются силой натяжения нити или силой упругости резинки, связывающей их. Если q - заряд каждой из шайб, а k – коэффициент жесткости резинки, то $k(l - l_0) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$. Когда шайбы отпустили из положения «правильный треугольник», они стали двигаться, растягивая резинку. В силу симметрии системы ясно, что «центральная» шайба (находящаяся между нитями) движется только вдоль оси y, а «крайние» шайбы имеют одинаковые по величине симметрично направленные скорости (см. рисунок, где $\vec{u}$ – скорость центральной шайбы). В силу закона сохранения импульса y-компоненты скоростей крайних шайб равны $v_y = \dfrac{u}{2}$, и, так как нити остаются натянутыми, то проекции скоростей шайб на соединяющую их нить должны быть



равны: $u\cos(\alpha) = v_x \sin(\alpha) - v_y \cos(\alpha) \Rightarrow v_x = \dfrac{3\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)}u = \dfrac{3\sqrt{l_0^2 - x^2}}{2x}u$ (здесь x – координата «правой» шайбы). Значит, кинетическую энергию системы можно выразить через скорость средней шайбы: $E_K = \dfrac{m\vec{u}^2}{2} + 2\dfrac{m\vec{v}^2}{2} = \dfrac{3mu^2}{4}\dfrac{3l_0^2 - 2x^2}{x^2}$. Потенциальную энергию системы удобно определить так, чтобы она равнялась нулю в начальном положении системы (при недеформированной резинке): $E_\Pi = \dfrac{k(2x - l_0)^2}{2} + \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 x} - \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$. Выразив здесь заряд через l, получим: $E_\Pi(x) = -\dfrac{k(2x - l_0)}{2l_0 x}[l^2(l - l_0) - l_0 x(2x - l_0)]$. При изучении движения шайб будем пренебрегать излучением. Тогда максимальная длина резинки будет соответствовать моменту остановки шайб, когда $E_\Pi(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{l_0}{2}x - \dfrac{l^2(l - l_0)}{2l_0} = 0$. Нужное нам значение соответствует положительному корню этого уравнения. Следовательно, максимальная длина резинки $l_{\max} = 2x = \dfrac{l_0}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{8l^2(l - l_0)}{l_0^3}}\right] \approx 60{,}6$ см. Изменение скорости в процессе движения шайб можно найти из закона сохранения энергии $E_K + E_\Pi = 0$. Значит,

$$u^2 = \frac{2k\,x(2x-l_0)}{3m\,l_0(3l_0^2-2x^2)}[l^2(l-l_0)-l_0x(2x-l_0)].$$

Ясно, что $\frac{k}{m}=\omega^2$, и, если ввести обозначение $z\equiv\frac{x}{l_0}$, и учесть, что $\frac{l^2(l-l_0)}{l_0^3}=\frac{25}{64}$, то выражение для скорости средней шайбы принимает вид

$$u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}.$$

Максимум скорости соответствует максимуму этой функции. Разумным приближением для его вычисления является использование того соображения, что кинетическая энергия системы максимальна в момент прохождения положения равновесия, то есть при $z=\frac{l}{2l_0}=\frac{5}{8}$. Значит, максимальная скорость средней шайбы должна достигаться вблизи этого значения. Тогда $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ м/с.

ОТВЕТ: максимальная длина резинки $l_{\max}=\frac{l_0}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right]\approx 60{,}6$ см, максимальная скорость средней шайбы соответствует максимуму функции $u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}$, и примерно равна $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ м/с.

Максимальная оценка: 20 баллов.

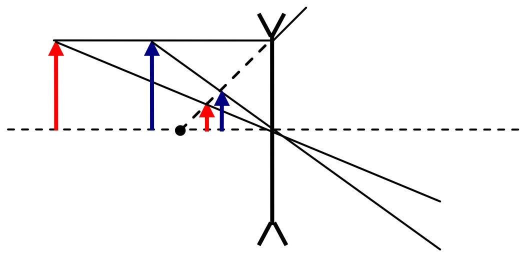
ПРИМЕЧАНИЕ: На самом деле из-за того, что распределение кинетической энергии между шайбами зависит от конфигурации системы (это видно из формулы для кинетической энергии), «настоящий» максимум немного смещен: $z_m\approx 0{,}659$, и $u_{\max}\approx 0{,}87$ м/с. Но такая точность в решении на олимпиаде не требовалась.

Задание 4:

Вопрос: Что нужно сделать для того, чтобы поперечное увеличение изображения пламени свечи, наблюдаемого через рассеивающую тонкую линзу, уменьшилось – придвинуть линзу к свече или отодвинуть от нее? Ответ объяснить.

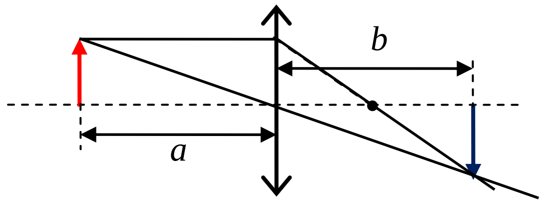
Задача: С помощью тонкой линзы на экране получено изображение нити небольшой лампочки, развернутой перпендикулярно оси линзы, с увеличением $|\Gamma|=2{,}5$. Когда экран придвинули к линзе на расстояние $s=8$ см, то для получения нового четкого изображения лампочку пришлось сдвинуть вдоль оси на расстояние $s'=1{,}6$ см. Каким стало увеличение изображения?

Ответ на вопрос: Рассеивающая линза создает мнимое изображение пламени свечи. Как видно из построения, при приближении линзы к объекту, поперечный размер его прямого мнимого изображения увеличивается. Следовательно, для уменьшения поперечного увеличения изображения пламени свечи необходимо отодвинуть линзу от свечи.



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Поскольку изображение получается на экране, то это действительное изображение, линза является собирающей, и нить лампы находится от линзы на расстоянии a, превышающем фокусное расстояние линзы F. Из формулы линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$ следует, что $b=\frac{aF}{a-F}$ и $a=\frac{bF}{b-F}$. Поэтому модуль увеличения $|\Gamma|=\frac{|b|}{|a|}=\frac{F}{a-F}=\frac{b-F}{F}$. Используя



эти формулы, найдем, что новое увеличение $|\Gamma'|=\frac{b-s-F}{F}=|\Gamma|-\frac{s}{F}\Rightarrow\frac{s}{F}=|\Gamma|-|\Gamma'|$ и одновременно $\frac{1}{|\Gamma'|}=\frac{a+s'-F}{F}=\frac{1}{|\Gamma|}+\frac{s'}{F}\Rightarrow\frac{s'}{F}=\frac{1}{|\Gamma'|}-\frac{1}{|\Gamma|}=\frac{|\Gamma|-|\Gamma'|}{|\Gamma'||\Gamma|}$ (ясно, что при приближении экрана к линзе, т.е. при уменьшении b, расстояние a должно увеличиваться). В результате находим: $\frac{s}{s'}=|\Gamma||\Gamma'|\Rightarrow|\Gamma'|=\frac{s}{s'|\Gamma|}=2$.

ОТВЕТ: $|\Gamma'|=\frac{s}{s'|\Gamma|}=2$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.