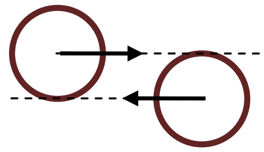
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года

БИЛЕТ № 02 (СОЧИ, 10-11 классы): возможные решения

Задание 1:

Вопрос: Две упругие однородные шайбы, скользившие поступательно по гладкому льду, столкнулись. При каких условиях после удара они также будут двигаться поступательно?

Задача: Два одинаковых упругих колечка радиуса R с шероховатой боковой поверхностью скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по величине скоростями v_0. Линии движения центров колечек проходят по касательной к ним (см. рисунок). После удара они

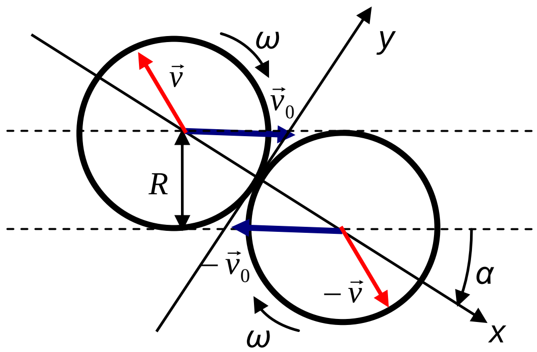


начали вращаться с угловыми скоростями $\omega = \dfrac{v_0}{4R}$. Найти величину скоростей движения центров масс колечек после удара.

Ответ на вопрос: Шайбы не начнут вращаться, если моменты сил их взаимодействия относительно центров масс (которые совпадают с геометрическими центрами, так как шайбы однородны) будут равны нулю. Это условие центральности соударения. Оно заведомо выполняется при лобовом ударе. При косом ударе необходимо, чтобы силы взаимодействия шайб были направлены по их радиусам, то есть боковые поверхности шайб должны быть гладкими.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Рассмотрим геометрию удара колец. Используем декартовы координаты



(x, y), причем ось x направим вдоль прямой, проходящей через центры колец в момент удара, а ось y – перпендикулярно ей. Кольца взаимодействуют посредством парных сил нормальной реакции (величина N, направлены вдоль оси x) и трения (величина $F_{тр}$, направлены вдоль оси y). Вращение колец появляется только благодаря силам трения, поэтому движение вдоль оси x происходит независимо от вращения и движения по оси y, то есть как при обычном упругом лобовом ударе тел одинаковой массы. Введем обозначения: пусть m – масса каждого из колец, $\vec{v}_0$ - скорость «первого» кольца до удара, $\vec{v}$ - его скорость после удара (из симметрии системы яи закона сохранения импульса ясно, что скорости «второго» кольца – это $-\vec{v}_0$ и $-\vec{v}$ соответственно), ω - угловые скорости колец после удара (соударение нецентральное, и за счет сил трения оба кольца начнут вращаться по часовой стрелке). Угол между $\vec{v}_0$ и осью x $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{R}{2R}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда из анализа движения по оси x следует, что $v_x = -v_0\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$. Проекция скорости первого кольца на ось y уменьшается за счет действия силы трения, и эта же сила изменяет скорость вращения этого кольца ωR. Заметим также, что при «разгоне» вращения все массы кольца двигаются вокруг центра с одинаковыми скоростями и ускорениями в любой момент времени. Поэтому:

$$\begin{cases} mv_y - mv_0 \sin\alpha = -F_{mp} \cdot \Delta t \\ mR\omega = F_{mp} \cdot \Delta t \end{cases} \Rightarrow v_y = v_0 \sin\alpha - R\omega = \frac{v_0}{4}$$

(здесь Δt - длительность времени скольжения колец друг по другу). Значит, величина скорости центра масс первого кольца $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$. Ясно, что у второго кольца скорость такая же.

ОТВЕТ: $v_1 = v_2 = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$.

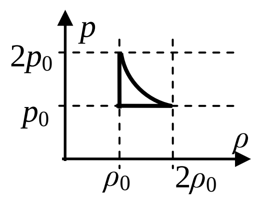
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Идеальный газ участвует в процессе, в котором его температура изменяется от T_0 до $5T_0$, а график зависимости давления от температуры – парабола $p = p_0\left[1 + \frac{T^2}{4T_0^2}\right]$.

Плотность газа в конце процесса равна ρ_K. Чему равна минимальная плотность газа в этом процессе?

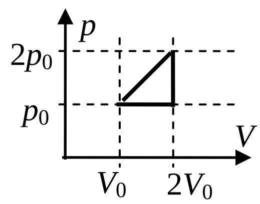
Задача: Постоянное количество гелия является рабочим телом тепловой машины, цикл которой в координатах «давление-плотность» показан на рисунке. Найти максимальное КПД этой тепловой машины (т.е в пренебрежении всеми потерями, кроме передачи тепла холодильнику). Криволинейный участок диаграммы – гипербола $p\rho = const$.



Ответ на вопрос: Плотность идеального газа можно связать с давлением и температурой с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$. Следовательно, в этом процессе $\rho(T) = \frac{\mu p_0}{2RT_0}\left[\frac{2T_0}{T} + \frac{T}{2T_0}\right]$. Поскольку минимальное значение величины $x + \frac{1}{x}$ равно 2 (при $x = 1$), и значение $T = 2T_0$ попадает в интервал температур процесса, то $\rho_{\min} = \frac{\mu p_0}{RT_0}$. Плотность в конце процесса $\rho_K = \frac{29}{20}\frac{\mu p_0}{RT_0}$, поэтому $\rho_{\min} = \frac{20}{29}\rho_K$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Удобно перейти к координатам давление-объем: в рассматриваемом цикле один из процессов – изохорное охлаждение, другой – изобарное сжатие, а третий процесс соответствует в координатах $p-V$ диаграмме в виде прямой, проходящей через начало координат: $\frac{p}{V} = const$ (см. рисунок, на котором введено обозначение $V_0 \equiv \frac{m}{2\rho_0}$, m – масса гелия). В таком процессе удобно вычислять работу $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$ и теплоту, отданную холодильнику



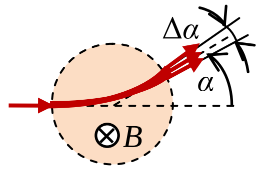
(это сумма количеств теплоты, отведенной от газа в изохорном и изобарном процессах) $Q_X = \frac{3}{2}2V_0 p_0 + \frac{5}{2}p_0 V_0 = \frac{11}{2}p_0 V_0$. Значит, $\eta = \frac{A}{A + Q_X} = \frac{1}{12} \approx 8{,}3\%$.

ОТВЕТ: $\eta = \frac{A}{A + Q_X} = \frac{1}{12} \approx 8{,}3\%$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Как может двигаться заряженная частица в однородном и постоянном магнитном поле (если других силовых полей нет)? Опишите все возможные случаи.

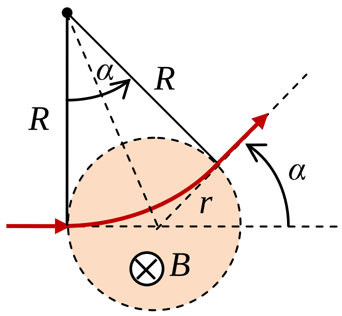


Задача: Узкий пучок ионов с одинаковым зарядом, но с немного различающимися массами направляют в область цилиндрической формы, в которой создано однородное магнитное поле, направленное по оси цилиндра. Скорость ионов перпендикулярна этой оси. После прохождения области пучок отклонился от направления первоначального движения на угол $\alpha = 30°$ и у него появилась расходимость с углом $\Delta\alpha \approx 0{,}6°$ (начальная расходимость была пренебрежимо мала по сравнению с этой). Найти (в процентах) разброс масс ионов пучка ($\Delta m / m = ?$).

Ответ на вопрос: В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$. Поэтому, если частица движется вдоль поля, то эта сила равна нулю, и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно. При движении частицы в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, движение является равномерным вращением по окружности – модуль скорости и индукция поля постоянны, и поэтому постоянен модуль ускорения, которое направлено перпендикулярно скорости. Если же скорость частицы будет иметь и составляющую, параллельную полю, и составляющую, перпендикулярную полю, то движение будет комбинацией двух разобранных, то есть частица будет двигаться по винтовой линии.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть q – заряд каждого иона. Под действием силы Лоренца ионы



двигаются по окружности, радиус которой определяется из уравнения для центростремительной компоненты ускорения: $m\dfrac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \dfrac{mv}{qB}$ (v – скорость ионов). Из построения видно, что угол отклонения иона при прохождении цилиндрической области радиуса r с магнитным полем определяется из соотношения $tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{r}{R} = \dfrac{qBr}{mv}$. Изменение этого угла при малом изменении массы: $\Delta\left[tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right] \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} \approx \dfrac{qBr}{v}\left(-\dfrac{1}{m^2}\right)\Delta m$. Так как знак изменения нам не важен (знак «минус» здесь просто показывает, что увеличение массы соответствует уменьшению угла), перепишем это соотношение в виде $\dfrac{qBr}{mv}\dfrac{\Delta m}{m} = tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)}$, откуда $\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%$.

ОТВЕТ: $\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%$.

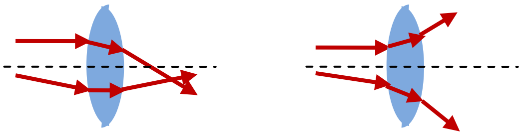
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: В каком случае двояковыпуклая тонкая линза может являться рассеивающей? Ответ обосновать.

Задача: Небольшая лампа подвешена на высоте $H = 1{,}8$ м над горизонтальной поверхностью стола. Между лампой и столом поместили линзу, оптическая сила которой $D = 2{,}5$ дптр, таким образом, что на столе наблюдалось четкое изображение нити лампы (плоскость линзы горизонтальна). Линзу переместили вниз на расстояние h, и оказалось, что и в этом случае на столе наблюдается четкое изображение нити. Найти h.

Ответ на вопрос: На обеих поверхностях двояковыпуклой линзы, помещенной в



однородную прозрачную среду, параксиальный световой луч преломляется в одну сторону: наклоняется к оси, если показатель преломления среды меньше, чем показатель преломления вещества линзы, и отклоняется от оси в противоположном случае (см. рисунок). Таким образом, двояковыпуклая линза может быть рассеивающей, если она помещена в среду, оптически более плотную, чем вещество линзы.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть x – высота размещения линзы над поверхностью стола. Тогда расстояние между лампой и линзой равно $H - x$, и четкое изображение нити наблюдается, если (в соответствии с формулой линзы): $\frac{1}{x} + \frac{1}{H-x} = D$, откуда следует уравнение $x^2 - Hx + \frac{H}{D} = 0$. Ясно, что и высота начального, и высота конечного положения линзы должны удовлетворять этому квадратному уравнению. Поэтому эти высоты есть не что иное, как два корня этого уравнения. Величина перемещения линзы является разностью двух его корней. Значит, она равна корню квадратному из дискриминанта уравнения: $h = \sqrt{H^2 - 4\frac{H}{D}} = \sqrt{H(H - 4D^{-1})} = 0.6$ м.

ОТВЕТ: $h = \sqrt{H(H - 4D^{-1})} = 0.6$ м.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.