ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года

БИЛЕТ № 07 (МОСКВА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: Как связаны между собой амплитуда ускорения, амплитуда скорости и амплитуда смещения при гармонических колебаниях? Ответ обосновать.

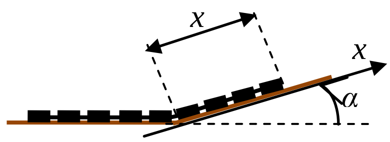
Задача: Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью $v_0 = 6$ м/с по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона $\alpha = 4°$ к горизонту. Состав полностью остановился за время $T = 30$ с, не доехав до конца склона. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне горки? Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2. Распределение массы по длине состава считать равномерным.

Ответ на вопрос: Гармоническими называются колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. В общем случае закон движения тела, совершающего такие колебания с периодом T, можно описать выражением $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$. Здесь за начало отсчета координаты взято положение равновесия, x_m – амплитуда смещения, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, а φ – начальная фаза колебаний. В этом случае $v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \equiv v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, а $a_x(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \equiv a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$.

Как видно, амплитуда скорости $v_m = \omega\, x_m$, а амплитуда ускорения $a_m = \omega\, v_m = \omega^2 x_m$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Запишем уравнение движения состава, используя в качестве координаты координату его «головы» x, отсчитываемую от начала подъема. Весь состав в каждый момент времени движется с одинаковыми скоростью и ускорением, причем это ускорение создается проекцией веса части состава, находящейся на склоне, на ось x: $ma_x = -mg\dfrac{x}{L}\sin(\alpha) \Rightarrow x'' + \dfrac{g\sin(\alpha)}{L}x = 0$ (L – длина состава). Как видно, движение «головы» состава по склону



происходит по гармоническому закону. Так как «колебание» начинается из положения равновесия, то его можно описать выражением $x(t) = x_m \sin(\omega t)$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{g\sin(\alpha)}{L}}$, а амплитуда смещения выражается через амплитуду скорости, совпадающей со скоростью состава на горизонтальном участке: $x_m = \dfrac{v_0}{\omega}$. Время подъема до остановки – это четверть периода колебаний, поэтому $\omega = \dfrac{\pi}{2T}$, и соответственно $x_m = \dfrac{2v_0 T}{\pi}$, а длина состава $L = \dfrac{g\sin(\alpha)}{\omega^2} = \dfrac{4g\sin(\alpha)T^2}{\pi^2}$. Поэтому доля длины состава, оказавшаяся на горке к моменту остановки $k = \dfrac{x_m}{L} = \dfrac{\pi v_0}{2gT\sin(\alpha)}$. Для получения численного ответа можно использовалось малость угла $\alpha = 4° = \dfrac{\pi}{45}$ рад. Тогда $k \approx \dfrac{45 v_0}{2gT} = 0{,}45$.

ОТВЕТ: $k = \dfrac{\pi v_0}{2gT\sin(\alpha)} \approx 45\%$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Водяной пар, начальное давление которого равнялось 0,5 атм. при температуре 100˚С, изотермически сжали, уменьшив его объем в три раза. Каким стало его давление? Ответ обосновать.

Задача: В гладком горизонтальном цилиндрическом сосуде между его вертикальной стенкой и подвижным вертикальным поршнем находится $m = 88$ г смеси азота и воды при температуре $t_0 = 100°C$. Наружное давление равно нормальному атмосферному $p_0 \approx 101$ кПа, и смесь занимает объем $V_0 \approx 107{,}4$ л. Смесь медленно охладили до температуры $t_1 = 80°C$, а затем поршень закрепили и продолжили медленное охлаждение. Сколько грамм жидкой воды будет находиться в сосуде при температуре $t_2 = 60°C$? Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_H(t_2) \approx 20$ кПа. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Ответ на вопрос: Водяной пар при такой температуре с хорошей точностью можно считать идеальным газом, поэтому при изотермическом сжатии до начала конденсации его давление растет обратно пропорционально объему, и при уменьшении объема в два раза давление вырастет до 1 атм., что соответствует давлению насыщенного водяного пара при температуре 100˚С. Поэтому при дальнейшем сжатии идет конденсация пара, и вплоть до окончания конденсации давление расти не будет. Итак, после уменьшения объема в три раза давление будет равно 1 атм.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В начальном состоянии сумма парциальных давлений водяного пара и азота равно p_0, поэтому водяной пар в цилиндре не насыщен, и вся вода находится в газообразном состоянии. Количества азота ν_A и воды ν_B удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \mu_A\nu_A + \mu_B\nu_B = m \\ \nu_A + \nu_B = \dfrac{p_0V_0}{RT_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_B = \dfrac{\mu_A}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{m}{\mu_A - \mu_B} \approx 1\,\text{моль} \\ \nu_A = \dfrac{m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} \approx 2{,}5\,\text{моль} \end{cases}.$$

Медленное охлаждение с подвижным поршнем происходит изобарически. Так как масса газов до начала конденсации не изменяется, парциальное давление водяного пара остается неизменным и равным $p_B = \dfrac{\nu_B}{\nu_A + \nu_B}p_0 \approx 28{,}9$ кПа. Объем смеси уменьшается пропорционально температуре: перед закреплением поршня $V_1 = \dfrac{T_1}{T_0}V_0 \approx 101{,}6$ л. После закрепления поршня охлаждение продолжилось изохорически. Если бы конденсация не началась, то давление водяного пара было бы равно $p_{B2} = \dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{\nu_B}{\nu_A + \nu_B}p_0 \approx 27{,}2$ кПа. Но это давление оказалось больше давления насыщенного водяного пара при температуре t_2, что свидетельствует о начале конденсации. Значит, в конечном состоянии водяной пар насыщен, и часть воды действительно находится в жидком состоянии. Начальная масса воды $m_B = \mu_B\nu_B \approx 18$ г, а масса водяного пара в конечном состоянии $m'_B = \dfrac{\mu_B p_H(t_2)V_1}{RT_2} \approx 13{,}2$ г.

Значит, масса жидкой воды $m''_B = m_B - m'_B = \dfrac{\mu_A\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{\mu_B m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B p_H(t_2)T_1V_0}{RT_2T_0} \approx 4{,}8$ г.

Отметим, что в ходе решения мы пренебрегали объемом образовавшейся воды, и, как видно из ответа, это корректное приближение.

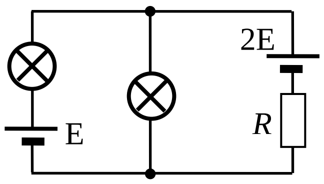
ОТВЕТ: $m''_B = \dfrac{\mu_A\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{\mu_B m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B p_H(t_2)T_1V_0}{RT_2T_0} \approx 4{,}8$ г.

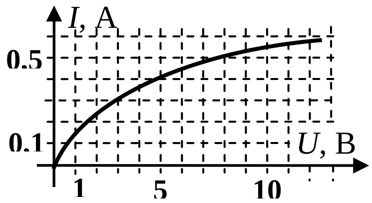
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Почему у ламп накаливания связь протекающего через их спираль тока с напряжением, как правило, не соответствует закону Ома (не является линейной)?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, одинаковые лампы являются нелинейными элементами – их вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Сопротивление резистора $R = 28$ Ом, а $\mathrm{E} = 6$ В. Найти суммарную мощность, потребляемую обеими лампами.

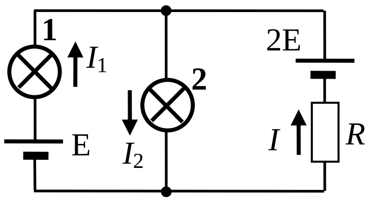


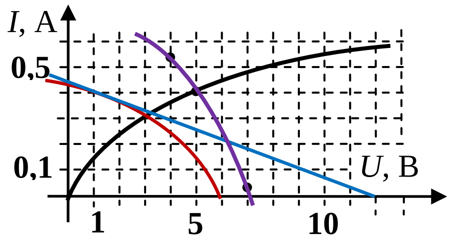


Ответ на вопрос: При протекании тока температура спирали лампы накаливания изменяется очень существенно (изменение порядка 10^3 К), что приводит к изменению сопротивления. Рабочая температура спирали (и соответственно величина ее сопротивления) определяется равновесием между выделением джоулева тепла и потерями на излучение во всех диапазонах, то есть чем больше приложенное напряжение, тем выше равновесная температура, тем больше сопротивление. По этой причине сила тока через спираль растет не прямо пропорционально приложенному напряжению, а существенно медленнее.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем лампы «слева направо». Пусть U_2 – напряжение на второй лампе. Положительные направления токов выбраны так, как показано на рисунке справа. Зависимость силы тока через лампу от напряжения на ней задается некоторой функцией, график которой - это вольтамперная характеристика. Обозначим $I_2 = f(U_2)$. Тогда напряжение на первой лампе $U_1 = \mathrm{E} - U_2$, и поэтому $I_1 = f(\mathrm{E} - U_2)$. Кроме того, по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U_2 = 2\mathrm{E} - IR \Rightarrow I = \dfrac{2\mathrm{E} - U_2}{R}$. Учитывая, что по закону непрерывности тока $I_2 = I + I_1$, получим уравнение для U_2: $f(U_2) = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U_2}{R} + f(\mathrm{E} - U_2)$.





Так как функция f задана нам графически, то и решать это уравнение нужно графически. Для этого построим график прямой $I = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U}{R}$ (голубая линия), график функции $I = f(\mathrm{E} - U)$ (красная линия – он получается путем переноса начальной почки вольтамперной характеристики лампы по оси абсцисс в точку $U = \mathrm{E}$ и «отражением», то есть заменой знака аргумента), и найдем точку пересечения «суммарного» графика (сиреневая линия) с графиком $I = f(U)$ (см. рисунок). Как видно, $U_2 \approx 5$ В и $I_2 \approx 0{,}4$ А. Следовательно, мощность, потребляемая второй лампой $P_2 = U_2 I_2 \approx 2{,}0$ Вт. Поскольку при таком значении напряжения на второй лампе $U_1 = \mathrm{E} - U_2 \approx 1$В, то в соответствии с вольтамперной характеристикой $I_1 \approx 0{,}14$ А, и $P_1 = U_1 I_1 \approx 0{,}14$ Вт. Итак, суммарная мощность $P = P_1 + P_2 \approx 2{,}14$ Вт.

ОТВЕТ: $P = U_1 I_1 + U_2 I_2 \approx 2{,}14$ Вт, где токи и напряжения определяются графически.

ПРИМЕЧАНИЕ: С учетом ограниченной точности графического решения правильным численным значением ответа считалось любое значение из диапазона $P \approx (2{,}14 \pm 0{,}08)$ Вт.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: В каком случае оптическую силу системы из двух тонких линз с общей осью с хорошей точностью можно считать равной сумме оптических сил этих линз? Ответ объяснить.

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от ближайшей из них расположен точечный источник света, лучи от которого последовательно проходят через обе линзы. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: При выводе формулы для оптической силы тонкой линзы мы считаем толщину линзы малой по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей, чтобы пренебрегать смещением луча вдоль плоскости линзы при прохождении от одной преломляющей поверхности до другой, и при этом оптические силы поверхностей суммируются. Ясно, что для сложения оптических сил четырех преломляющих поверхностей двух линз необходимо такое же пренебрежением смещением лучей. Таким образом, $D_{1+2} \approx D_1 + D_2$, если составная линза тоже является тонкой, то есть полная толщина составной линзы мала по сравнению с радиусами кривизны преломляющих поверхностей.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть линза с большей оптической силой – это «первая» линза с фокусным расстоянием F_1, а фокусное расстояние «второй» линзы равно F_2. Тогда, для первого случая: расстояние от источника до первой линзы равно $a_1 = L$, поэтому расстояние от первой линзы до создаваемого ей изображения источника определяется из формулы линзы $\frac{1}{L} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \frac{LF_1}{L - F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы, расстояние до которой $a_2 = L - b_1 = \frac{L(L - 2F_1)}{L - F_1}$. При этом расстояние до общего изображения $b_2 = 2L$, поэтому $\frac{L - F_1}{L(L - 2F_1)} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \frac{L}{L - 2F_1} = \frac{2(L - F_2)}{F_2}$. Удобно обозначить $F_1 \equiv xL$, $F_2 \equiv yL$. Тогда полученное уравнение означает, что $1 - 2x = \frac{y}{2(1-y)} \Rightarrow x = \frac{2 - 3y}{4(1-y)}$. Для второго случая, действуя аналогично, получим ($F_1 \leftrightarrow F_2$ и $2L \to \frac{3}{2}L$): $\frac{L - F_2}{L(L - 2F_2)} + \frac{2}{3L} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow \frac{5L - 7F_2}{L - 2F_2} = \frac{3L}{F_1} \Rightarrow \frac{5 - 7y}{1 - 2y} = \frac{3}{x}$. Подставляя сюда выражение для x, получаем уравнение $y^2 - \frac{7}{3}y + \frac{2}{3} = 0$, корни которого $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Соответствующие значения x – это $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{3}{8}$. Условию задачи удовлетворяют только первые корни, так как $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$ – здесь оптическая сила первой линзы оказалась бы меньше, чем у второй. Итак, $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

ОТВЕТ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.