Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. На экскурсию в Нижний Новгород едут 50 школьников вместе с родителями, часть из которых ведут автомобили. В каждый из автомобилей помещается 6 человек, включая водителя. Какое наименьшее количество родителей необходимо пригласить на экскурсию?

   ОТВЕТ: 10

   Решение: В автомобиль помещается не более 5 школьников, поэтому потребуется 10 автомобилей, т.е. 10 водителей.

2. В ряд через запятую стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 100. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

20, _ ,_, _, _, _, _, 16.

ОТВЕТ: 20,16,64,20,16,64,20,16

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

3. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{28}$

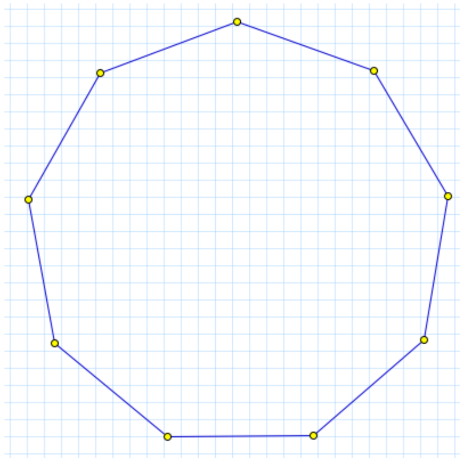
   Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

4. В тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Павел правильно ответил на 32 вопроса. При этом процент его верных ответов оказался больше 70, но меньше 77. Сколько вопросов было в тесте?

   ОТВЕТ: 45.

   Решение: из условия $0.7 < 32/x < 0.77$ вытекает, что $41<x<46$, но x кратно 5, поэтому $x=45$.

5. В вершинах правильного 9-угольника (см. рис.) расставьте числа 2016, 2017, …, 2024, таким образом, чтобы для любых трех вершин, образующих правильный треугольник одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



ОТВЕТ: расставить числа подряд (возможны и другие варианты).

Решение: заметить, что любые три числа, идущие через равные промежутки, подходят.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. В ряд через запятую стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 100. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

   20, _ ,_, _, _, _, _, 16.

   ОТВЕТ: 20,16,64,20,16,64,20,16

   Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

2. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{28}$

   Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

3. В тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Павел правильно ответил на 32 вопроса. При этом процент его верных ответов оказался больше 70, но меньше 77. Сколько вопросов было в тесте?

   ОТВЕТ: 45.

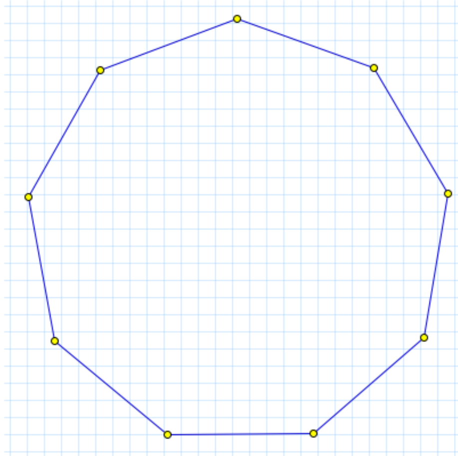
   Решение: из условия $0.7 < 32/x < 0.77$ вытекает, что $41<x<46$, но x кратно 5, поэтому $x=45$.

4. Найдите все 4-значные числа, которые на 8802 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

   ОТВЕТ: 1099

   Решение: Заметим, что x+8802 < 10000, следовательно, x< 1198, поэтому первая цифра равна 1, а вторая – 0 или 1. Сумма x+8802 оканчивается на 1, поэтому последняя цифра 9. Получаем число вида 10a9 или 11a9, получаем уравнение вида 10a9+8802=9a01 или 11a9+8802=9a11. Первое дает решение a=9, второе – решения не имеет.

5. В вершинах правильного 9-угольника (см. рис.) расставьте числа 2016, 2017, ..., 2024, таким образом, чтобы для любых трех вершин, образующих правильный треугольник одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



ОТВЕТ: расставить числа подряд (возможны и другие варианты).

Решение: заметить, что любые три числа, идущие через равные промежутки, подходят.

6. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{1001}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

ОТВЕТ: 4.

Решение: запишем теорему Пифагора: $a^2+1001=b^2$. Отсюда получим (b - a)(b+a)=1001=7x11x13. Можно представить 1001 как произвденеи двух множителей 1x1001=7x143=11x91=13x77 – первый множитель должен быть меньше – всего 4 варианта.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8}\ldots\frac{1}{9}\ldots\frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: $\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{28}$

   Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

2. Коле вдвое больше лет, чем было Оле, когда Коле было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Коле, то им в сумме будет 36 лет. Сколько лет Коле сейчас?

   ОТВЕТ: 16 лет.

   Решение: Обозначим x –текущий возраст Коли, y – Оли. Составим систему $x=2(y-(x-y))$; $x+(x-y) + y + (x-y) = 36$. Решим ее: x=16, y=12.

3. Будем называть *колебанием* функции разницу между ее наибольшим и наименьшим значением. Каким может быть максимальное колебание функции $f(x)\times g(x)$, если известно, что отрезок [-8, 4] является множеством значений функции $f(x)$, а отрезок [-2, 6] является множеством значений функции $g(x)$.

   ОТВЕТ: 72

   Решение: Максимальное значение $f(x)\times g(x)$ равно 24=4x6, минимальное -48=(-8)x6.

4. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{1001}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

   ОТВЕТ: 4.

   Решение: запишем теорему Пифагора: $a^2+1001=b^2$. Отсюда получим $(b-a)(b+a)=1001=7\times11\times13$. Можно представить 1001 как произвденеи двух множителей 1x1001=7x143=11x91=13x77 – первый множитель должен быть меньше – всего 4 варианта.

5. Найдите все 4-значные числа, которые на 8802 больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1099

Решение: Заметим, что $x+8802 < 10000$, следовательно, $x< 1198$, поэтому первая цифра равна 1, а вторая – 0 или 1. Сумма $x+8802$ оканчивается на 1, поэтому последняя цифра 9. Получаем число вида 10a9 или 11a9, получаем уравнение вида 10a9+8802=9a01 или 11a9+8802=9a11. Первое дает решение a=9, второе – решения не имеет.

6. Дан прямоугольный треугольник KLM с катетами LM=60 и KM=80. На сторонах KL, LM и МК выбраны точки M_1, K_1, L_1, соответственно, так, что $KM_1=LK_1=ML_1=2$. Найдите площадь треугольника $K_1L_1M_1$.

ОТВЕТ: 2216,8

Решение: Обозначим $S(KLM) = 2400 = S$. Тогда $S(KL_1M_1) = 2/100 \times 78/80 \times S$; $S(K_1LM_1) = 98/100 \times 2/60 \times S$; $S(K_1L_1M) = 58/60 \times 2/80 \times S$. Получим $S(K_1L_1M_1) = S(1 – 468/24000 – 580/24000 – 784/24000) = 22168/24000 \times 2400 = 2216,8$.

7. Найдите все пары целых чисел (x, y) для которых выполнено равенство $x^2+y^2=x+y+2$.

ОТВЕТ: (-1,0); (-1,1); (0,-1); (0,2); (1,-1), (1,2), (2,0); (2,1)

Решение: Функция x2-x принимает значения от -0.25 до бесконечности, -y2+y+2 от минус бесконечности до 2.25. Общие значения (целые) 0,1,2, Дальше подбором.