Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

Решения аналогичны решениям варианта v2a, поэтому приводятся только ответы.

1. Николай Иванович продает в электричке суперклей – один тюбик за 40 рублей или 3 тюбика за 100, причем с каждой такой покупки получает одинаковую прибыль. По какой цене ему надо продавать 10 тюбиков, чтобы при этом получать такую же прибыль?
   ОТВЕТ: 310. (решение – см. v2a).
2. Целое число уменьшили на 3, при этом его квадрат увеличился на 2015. Каким число было в начале (до уменьшения)?
   ОТВЕТ: Таких чисел (целых) не существует. (решение – см. v2a).
3. Найдите все несократимые положительные дроби, которые уменьшаются в 2 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.
   ОТВЕТ: 8/3. (решение – см. v2a).
4. Прямоугольник размером 7х6 дм. разрезали на 5 квадратов. Все разрезы проходят параллельно сторонам исходного прямоугольника, все квадраты имеют целые размеры в дм. Найдите суммарную длину сделанных разрезов.
   ОТВЕТ: 15. (решение – см. v2a).
5. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

ОТВЕТ: 208.

Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot 5\cdot 7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150 < x \le 300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Целое число уменьшили на 3, при этом его квадрат увеличился на 2015. Каким число было в начале (до уменьшения)?
ОТВЕТ: Таких чисел (целых) не существует.
2. Мудрый Гендальф сказал Фродо, что для того, чтобы перевести эльфийские мили в обычные нужно разделить расстояние в эльфийских милях на 5 и полученное число уменьшить на 5%. Фродо решил, что для перевода из человеческих миль в эльфийские нужно расстояние в обычных милях умножить на 5 и полученное число увеличить на 5%. На сколько процентов от правильного значения расстояния в эльфийских милях он ошибётся, если будет так переводить?
ОТВЕТ: на 0.25% (решение – см. v2a).
3. Прямоугольник размером 7х6 дм. разрезали на 5 квадратов. Все разрезы проходят параллельно сторонам исходного прямоугольника, все квадраты имеют целые размеры в дм. Найдите суммарную длину сделанных разрезов.
ОТВЕТ: 15 дм. (решение – см. v2a).
4. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?
ОТВЕТ: 208.
Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot5\cdot7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150<x\le300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.
5. Решите уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}=1$
ОТВЕТ: *x* = 0 или 1.
Решение: Из ОДЗ 0<=x<=1. Видно, что 0 и 1 подходят. Если же 0<x<1, то $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}<x+(1-x)=1$, и не может быть решением.

6. Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

ОТВЕТ: 324; 648.

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа *x*. Тогда уравнение $x = 36 \cdot S(x)$ не имеет решений при $n \geq 5$, так как $x \geq 10^{n-1}$, а $36 \cdot S(x) \leq 36 \cdot 9 \cdot n = 324n < 10^3 \cdot n$. При $n = 4$ решений тоже нет, так как (здесь *a*, *b*, *c*, *d* – цифры числа):

$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d > 36(a+b+c+d) \Leftrightarrow 964a + 64b > 26 \cdot 9 + 35 \cdot 9 \geq 26c + 35d$.

При $n = 3$: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 36(a+b+c) \Leftrightarrow 64a = 26b + 35c$. После этого перебор. В результате получаются числа 324 и 648.

При $n = 2$: $a \cdot 10 + b = 36(a+b) \Leftrightarrow 26a = 35b$ – решений нет

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников

«Покори Воробьевы горы»

по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Мудрый Гендальф сказал Фродо, что для того, чтобы перевести эльфийские мили в обычные нужно разделить расстояние в эльфийских милях на 5 и полученное число уменьшить на 5%. Фродо решил, что для перевода из человеческих миль в эльфийские нужно расстояние в обычных милях умножить на 5 и полученное число увеличить на 5%. На сколько процентов от правильного значения расстояния в эльфийских милях он ошибётся, если будет так переводить?

ОТВЕТ: на 0.25% (решение – см. v2a).

2. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

ОТВЕТ: 208.

Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot5\cdot7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150<x\leq300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}=1.$

ОТВЕТ: *x* = 0 или 1.

Решение: Из ОДЗ 0<=x<=1. Видно, что 0 и 1 подходят. Если же 0<x<1, то $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}<x+(1-x)=1$, и не может быть решением.

4. Пусть $F(x)=x^2+ax+b$ где *a, b* – некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $G(x)=|F(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке [-1;5]?

ОТВЕТ: 4,5. (решение – см. v2a).

5. Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

ОТВЕТ: 324; 648.

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа *x*. Тогда уравнение $x = 36 \cdot S(x)$ не имеет решений при $n \geq 5$, так как $x \geq 10^{n-1}$, а $36 \cdot S(x) \leq 36 \cdot 9 \cdot n = 324n < 10^3 \cdot n$. При $n = 4$ решений тоже нет, так как (здесь *a*, *b*, *c*, *d* – цифры числа):

$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d > 36(a+b+c+d) \Leftrightarrow 964a + 64b > 26 \cdot 9 + 35 \cdot 9 \geq 26c + 35d$.

При $n = 3$: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 36(a+b+c) \Leftrightarrow 64a = 26b + 35c$. После этого перебор. В результате получаются числа 324 и 648.

При $n = 2$: $a \cdot 10 + b = 36(a+b) \Leftrightarrow 26a = 35b$ – решений нет.

6. В трапеции *ABCD* известны основания *AD*=12, BC=7 и боковые стороны *AB* = 3, *CD* = 4. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

ОТВЕТ: 2,5. (решение – см. v2a).

7. Решите в натуральных числах уравнение $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}$

ОТВЕТ: *n*=1.

Решение: $2n = 3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^5} \leq 3$, подходит только n=1