Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. Тетя Зина продает в электричке носки – одну пару за 20 рублей или 3 пары за 50, причем с каждой такой покупки получает одинаковую прибыль. По какой цене ей надо продавать 5 пар, чтобы при этом получать такую же прибыль?
   ОТВЕТ: по 80 руб.
   Решения: Если оптовая цена носков x, то $20-x=50-3x$, откуда $x=15$.
2. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?
   ОТВЕТ: -505.
   Решение: Решим уравнение $(x+2)^2=x^2-2016$.
3. Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.

   ОТВЕТ: 2/9.

   Решение: Заметим, что если числитель не меньше 6, то от прибавления к нему 12, он вырастет не более, чем в три раза, поэтому сама дробь тем более не может увеличиться в 3 раза. Перебирая числители 1,2,3,4,5, получим дроби 1/3.6, 2/9, 3/18, 4/36, 5/90, из которых только 2/9 - несократимая.
4. Маленький огород размером 6х7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все межи между грядками проходят параллельно сторонам квадрата, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся мёж. Считать мёжи линиями, не имеющими толщины.

   ОТВЕТ: 15м.

   Решение: 42 можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42=4^2+3^2+3^2+2^2+2^2$. Их суммарный периметр равен 4*4+4*3+4*3+4*2+4*2 = 56. Но надо отнять внешние границы, их длина 6+6+7+7=26, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов – поэтому надо поделить на 2.
5. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

   ОТВЕТ: 11

   Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму 9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?

   ОТВЕТ: -505.

   Решение: Решим уравнение $(x+2)^2=x^2-2016$.

2. Знайка сказал Незнайке, что для того, чтобы перевести килолуны в килограммы нужно разделить массу в килолунах на 4 и полученное число уменьшить на 4%. Незнайка решил, что для перевода из килограммов в килолуны нужно массу в килограммах умножить на 4 и полученное число увеличить на 4%. На сколько процентов от правильного значения массы в килолунах он ошибётся, если будет так переводить?

   ОТВЕТ: на 0,16%.

   Решение: Один килолун составляет 0.25*0.96 = 0.24 кг. Следовательно, в одном килограмме 25/6 килолунов. Если Незнайка будет переводить 1 кг, то получит 4*1.04 = 4.16, что составляет 99,84% от 25/6.

3. Маленький огород размером 6х7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все мёжи (прямые, разделяющие грядки) проходят параллельно сторонам квадрата, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся мёж.

   ОТВЕТ: 15м.

   Решение: 42 можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42=4^2+3^2+3^2+2^2+2^2$. Их суммарный периметр равен 4*4+4*3+4*3+4*2+4*2 = 56. Но надо отнять внешние границы, их длина 6+6+7+7=26, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов – поэтому надо поделить на 2.

4. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

   ОТВЕТ: 11

   Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму

9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

5. Решите уравнение $\frac{\sqrt{(-x)^2}+\left(\sqrt{-x}\right)^2}{x^2+(-x)^2}=\frac{1}{2016}$

ОТВЕТ:x=-2016.

Решение: Заметим, что x<0 из ОДЗ, представим уравнение как $\frac{-2x}{2x^2}=\frac{1}{2016}$.

6. Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (*a,b,c* – произвольные цифры, не обязательно разные).

ОТВЕТ: 90.

Решение: Заметим, что первая цифра не влияет на делимость, следовательно, a=1,…,9. С Другой стороны, из делимости на 8 вытекает, что c=0 или 8. Если c=0, то b должно быть четным, а при c=8 – нечетным. В обоих случаях получаем по 5 вариантов, откуда общее количество 9*(5+5) = 90.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Знайка сказал Незнайке, что для того, чтобы перевести килолуны (единица массы, которую используют коротышки на Луне) в килограммы нужно разделить массу в килолунах на 4 и полученное число уменьшить на 4%. Незнайка решил, что для перевода из килограммов в килолуны нужно массу в килограммах умножить на 4 и полученное число увеличить на 4%. На сколько процентов от правильного значения массы в килолунах он ошибётся, если будет так переводить?

ОТВЕТ: на 0,16%.

Решение: Один килолун составляет 0.25*0.96 = 0.24 кг. Следовательно, в одном килограмме 25/6 килолунов. Если Незнайка будет переводить 1 кг, то получит 4*1.04 = 4.16, что составляет 99,84% от 25/6.

2. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

ОТВЕТ: 11

Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму 9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{(-x)^2}+\left(\sqrt{-x}\right)^2}{x^2+(-x)^2}=\frac{1}{2016}$

ОТВЕТ:x=-2016.

Решение: Заметим, что x<0 из ОДЗ, представим уравнение как $\frac{-2x}{2x^2}=\frac{1}{2016}$.

4. Пусть $f(x) = x^2+px+q$ где *p, q* – некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $g(x) = |f(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке [2;6]?

ОТВЕТ: на 2.

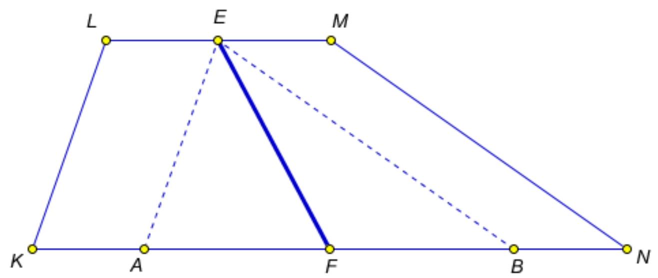
Решение: Для $f(x) = x^2+px+q$ наибольшее значение от наименьшего будет отличаться не менее, чем на 4 (это можно показать графически). Подбирая *q*, получим, что наибольшее значение модуля от наименьшего отличается не более, чем на 2. Пример: $f(x) = (x-4)^2-2$.

5. Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (*a, b, c* – произвольные цифры, не обязательно разные).

   ОТВЕТ: 90.

   Решение: Заметим, что первая цифра не влияет на делимость, следовательно, a=1,…,9. С Другой стороны, из делимости на 8 вытекает, что c=0 или 8. Если c=0, то b должно быть четным, а при c=8 – нечетным. В обоих случаях получаем по 5 вариантов, откуда общее количество 9*(5+5) = 90.

6. В трапеции *KLMN* известны основания *KN*=25, *LM*=15 и боковые стороны *KL*= 6, *MN* = 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.



   ОТВЕТ: 5.

   Решение: Проведем *EA* параллельно *KL* и *EB* параллельно *MN* (см. рис). Треугольник *ABE* – прямоугольный со сторонами 6,8,10. *EF* – медиана, т.е. равна половине гипотенузы.

7. Решить в целых числах уравнение $x^6=y^3+217$.

   ОТВЕТ: (-1,-6) (1,-6) (-3,8), (3,8).

   Решение: Заметим, что $y^3+217 >= 0$, следовательно, y >= -6.
   Проверяем, что Y=-1,-2,-3,-4,-5 не дают решения, при y=-6 получаем x=+/-1.
   Заметим, что $y^3+217 = x^6 >=(y+1)^3$, откуда $y^2+y <=72$, т.е. y<=8. Значит $x^6 <=$ 8^3+217 = 729. Поэтому |x| <= 3. Проверка показывает, что подходят x=+/-3, y = 8.