Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. Миша, Петя, Коля и Вася играли в «подкидного дурака», всего сыграли 16 партий. Каждый остался «в дураках» хотя бы один раз. Известно, что больше всех оставался Миша, а Петя и Коля в сумме остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?

   ОТВЕТ: 1.

   Решение: Петя или Коля остался не менее 5 раз, значит Миша оставался не менее 6 раз, следовательно Вася остался один раз (0 раз он не мог по условию).

2. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

   ОТВЕТ:2520.

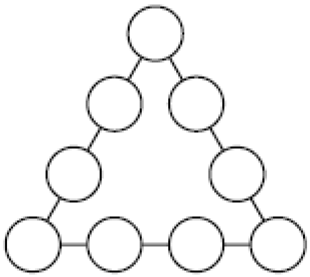
   Решение: Заметим, что N должно быть кратно 2,3,4, …, 10, следовательно, N= НОК (2,3,4,..,10)= 2^3x3^2x5x7= 2520.

3. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

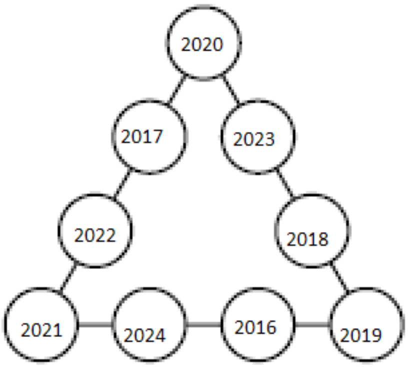
   ОТВЕТ: на 8%

   Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

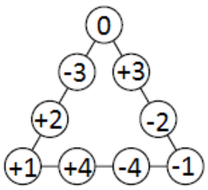
4. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

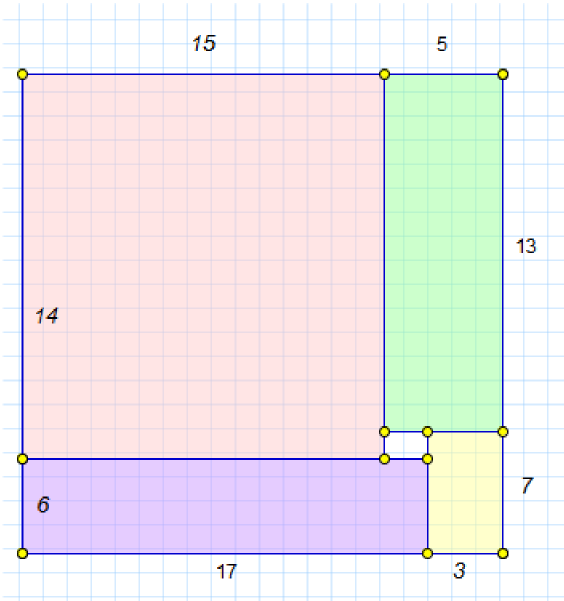


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



5. Дан квадрат 1x1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20x20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами   (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

   Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

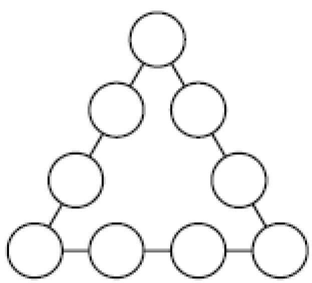
   ОТВЕТ:2520.

2. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

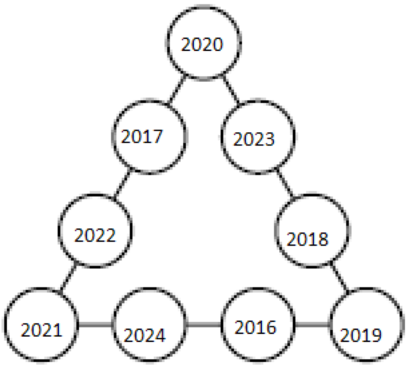
   ОТВЕТ: на 8%

   Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

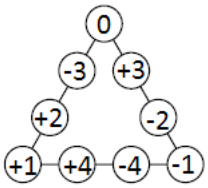
3. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?

   ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

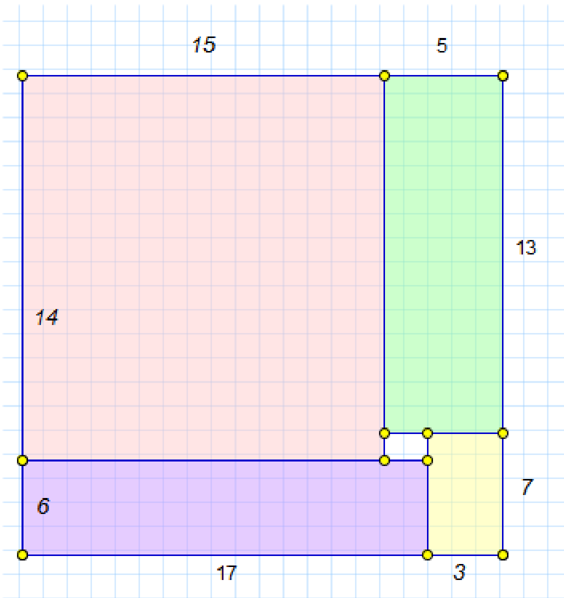


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



4. Дан квадрат 1x1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20x20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения



5. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

   ОТВЕТ: 8999999934.

   Решение: Всего существует 9000000000 10-значных чисел. Найдем все числа, которые не подходят, т.е. сумма цифр которых больше 87. Запишем число из одних девяток, его сумма цифр равна 90. Если одну из девяток заменить на 7 или 8, то сумма цифр останется больше 87, таких вариантов 10+10=20. Также можно заменить две девятки на восьмерки – таких вариантов 10*9/2 = 45. Всего получим 45+20+1=66 чисел, котрые не подходят. Значит остальные 8999999934 подходят.

6. Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число $99N$ состоит из одних троек.

   ОТВЕТ: 3367.

   Решение. Число 33N должно состоять из одних единиц. Число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11. Число состоящее из одних единиц делится на 3, если число единиц кратно 3 и делится на 11, если число единиц кратно 2. Наименьшее такое число – 111111, значит 33N = 111111, откуда N=3367.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Найдите наименьшее натуральное *N*, такое, то *N*+2 делится (без остатка) на 2, *N*+3 – на 3, …, *N*+10 – на 10.

   ОТВЕТ:2520.

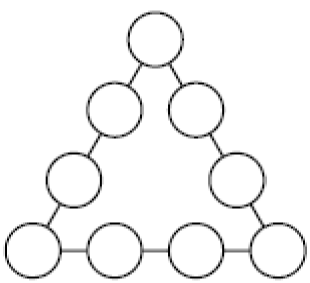
   Решение: Заметим, что N должно быть кратно 2,3,4, …, 10, следовательно, N= НОК (2,3,4,..,10)= 2^3x3^2x5x7= 2520.

2. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

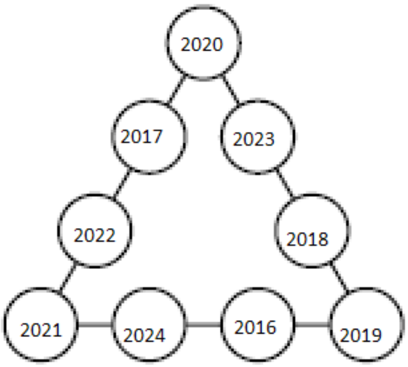
   ОТВЕТ: на 8%

   Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

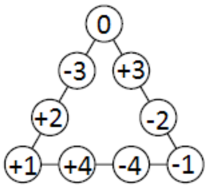
3. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



   ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

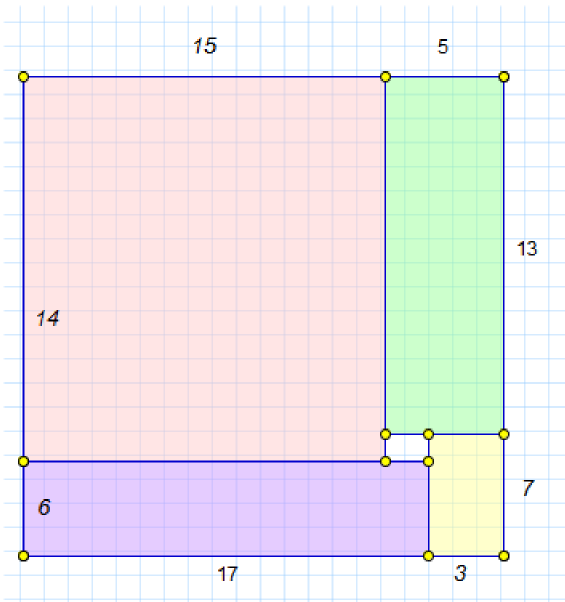


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



4. Дан квадрат 1x1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20x20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения



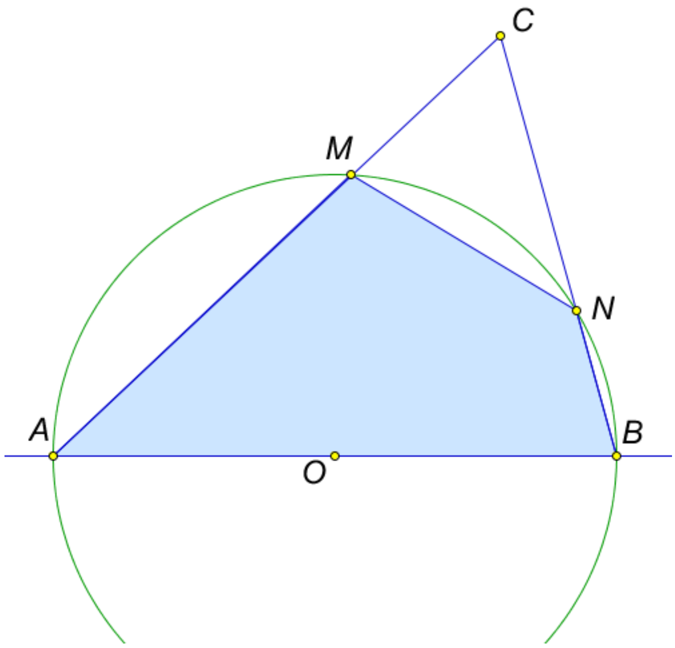
5. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

Найдите наименьшее натуральное число *N*, такое, что число 99*N* состоит из одних троек.

ОТВЕТ: 3367.

Решение. Число 33N должно состоять из одних единиц. Число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11. Число состоящее из одних единиц делится на 3, если число единиц кратно 3 и делится на 11, если число единиц кратно 2. Наименьшее такое число – 111111, значит 33N = 111111, откуда N=3367.

6. Окружность с диаметром *AB* пересекает отрезки *AC* и *BC* в точках *M* и *N*, соответственно, причем длина отрезка *MN* равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника *ABNM*, если известно, что *AC*=12 и *BC*=8.



ОТВЕТ: $18\sqrt{3}$.

Решение: Дуга MN составляет 60^o поэтому угол C равен 60^o, следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AC \cdot BC \sin 60^o = 24\sqrt{3}$. Треугольники ABC и MNC подобны с коэффициентом ½, поэтому площаь MNC в 4 раза меньше – $6\sqrt{3}$. Отсюда площадь AMNB равна $18\sqrt{3}$.

7. Найдите все пары натуральных чисел (x,y), для которых выполнено равенство $x^2+xy = y+92$.

ОТВЕТ: (2,88); (8,4).

Решение: Преобразуем x^2-1+xy-y=91. Разложим на множители (x-1)(x+y+1)=7x13. Оба сомножителя положительны и первый множитель должен быть меньше, поэтому возможны варианты x-1 = 1, x+y+1=91 или x-1 = 7,

$x+y+1=13$. получаем ответы $x=2$, $y = 88$ или $x=8$, $y=4$