Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. На экскурсию в Санкт-Петербург едут 30 школьников вместе с родителями, часть из которых ведут автомобили. В каждый из автомобилей помещается 5 человек, включая водителя. Какое наименьшее количество родителей необходимо пригласить на экскурсию?

   ОТВЕТ: 10

   Решение: В автомобиль помещается не более 4 школьников, поэтому потребуется 8 автомобилей, т.е. 10 водителей.

2. В ряд стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 50. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

11 _ _ _ _ _ _ 12.

ОТВЕТ: 11,12,27,11,12,27,11,12

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

3. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

   ОТВЕТ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot (4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$

4.

В тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

Ответ: 32.

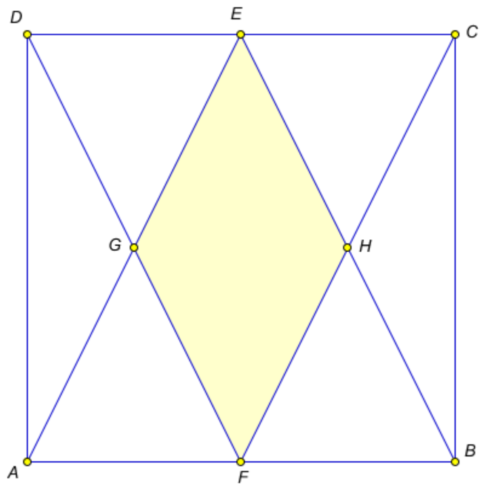
Решение. По условию $\frac{60}{100}<\frac{20}{x}<\frac{70}{100}$, отсюда $28\frac{4}{7}=\frac{200}{7}<x<\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$, то есть $29\le x\le 33$.

Из первого условия задачи следует, что число вопросов должно делиться на 4.

5. В квадрате *ABCD* точки *F* и *E* – середины сторон *AB* и *CD*, соответственно . Точку *E* соединили с вершинами *A* и *B*, а точку *F* – с *C* и *D*, как показано на рисунке. Определите площадь ромба *FGEH*, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата *AB*=4.

ОТВЕТ 4.

Решение – квадрат можно разрезать на кусочки и сложить еще 3 таких же ромба, т.е. ромб составляет ¼ от площади квадрата.



Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. В ряд стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 50. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

11 _ _ _ _ _ _ 12.

ОТВЕТ: 11,12,27,11,12,27,11,12

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

2. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

ОТВЕТ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot(4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$

3. В тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

ОТВЕТ: 32.

Решение. По условию $\frac{60}{100}<\frac{20}{x}<\frac{70}{100}$, отсюда $28\frac{4}{7}=\frac{200}{7}<x<\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$, то есть $29\le x\le 33$. Из первого условия задачи следует, что число вопросов должно делиться на 4.

4. Найдите все 4-значные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1909

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{abcd}$

Тогда $\overline{abcd}=\overline{dcba}-7182$, откуда 111($d$-$a$)+10($c$-$b$)=798.

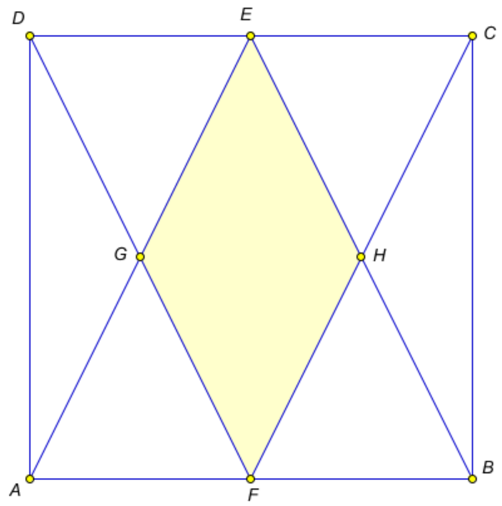
Очевидно, (d-a) может быть равно только 7 или 8.

В случае d-a=7 получим 10(c-b)=21 – не подходит.

В случае d-a=8 получим 10(c-b) = -90, следовательно, b-c=9, откуда b=9, c=0.

Равенство d-a=8 возможно при d=8, a=0 или d=9, a=1, но первая цифра не может быть равна нулю, следовательно, a=1, b=9, c=0, d=9.

5. В квадрате *ABCD* точки *F* и *E* – середины сторон *AB* и *CD*, соответственно . Точку *E* соединили с вершинами *A* и *B*, а точку *F* – с *C* и *D*, как показано на рисунке. Определите площадь ромба *FGEH*, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата *AB*=4



Ответ 4.

Решение – квадрат можно разрезать на кусочки и сложить еще 3 таких ромба, т.е. ромб составляет ¼ от площади квадрата.

6. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

ОТВЕТ: 12.

Решение. По условию $c^2 - b^2 = a^2 = 2016$, то есть $(c-b)(c+b) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Система $\begin{cases} c-b=n, \\ c+b=k \end{cases}$ (здесь *n* – один из делителей числа 2016, а $k = \dfrac{2016}{n}$) имеет натуральные решения $c = \dfrac{n+k}{2}$, $b = \dfrac{k-n}{2}$, если $n < k$ (то есть $n \le 44$) и *n* и *k* – четные.

Возможные значения *n*: 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2 \cdot 3 = 6$, $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2 \cdot 7 = 14$, $2^2 \cdot 7 = 28$, $2 \cdot 3^2 = 18$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 21$ – всего 12 вариантов.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

   Ответ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot (4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$.

2. Аня не сказала Мише, сколько ей лет, но сообщила, что на каждый ее день рождения мама бросает в копилку столько монет, сколько лет исполняется Ане. Миша оценил, что в копилке не менее 110, но не более 130 монет. Сколько же лет Ане?

   Ответ: 15. Решение. Либо воспользоваться формулой суммы арифметической прогрессии: $110\le \frac{1+n}{2}n\le 130$, либо просто посчитать сумму «в лоб».

3. Отрезок $[-3;9]$ является множеством значений функции $f(x)$, отрезок $[-1;6]$ является множеством значений функции $g(x)$. На какую наибольшую величину может отличаться наибольшее значение функции $f(x)\times g(x)$ от наименьшего значения этой функции?

   ОТВЕТ 72.

   Решение: Максимальное значение может быть 9*6 = 54, а минимальное (-3)*6=-18.

4. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

   ОТВЕТ: 12.

   Решение. По условию $c^2-b^2=a^2=2016$, то есть $(c-b)(c+b)=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Система $\begin{cases} c-b=n, \\ c+b=k \end{cases}$ (здесь *n* – один из делителей числа 2016, а $k=\frac{2016}{n}$) имеет натуральные решения $c=\frac{n+k}{2}$, $b=\frac{k-n}{2}$, если $n<k$ (то есть $n\le 44$) и *n* и *k* – четные.

   Возможные значения *n*: 2, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2\cdot 3=6$, $2^2\cdot 3=12$, $2^3\cdot 3=24$, $2\cdot 7=14$, $2^2\cdot 7=28$, $2\cdot 3^2=18$, $2^2\cdot 3^2=36$, $2\cdot 3\cdot 7=21$ – всего 12 вариантов.

5. Найдите все 4-значные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1909

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{abcd}$

Тогда $\overline{abcd} = \overline{dcba} - 7182$, откуда 111($d$-$a$)+10($c$-$b$)=798.

Очевидно, (d-a) может быть равно только 7 или 8.

В случае d-a=7 получим 10(c-b)=21 – не подходит.

В случае d-a=8 получим 10(c-b) = -90, следовательно, b-c=9, откуда b=9, c=0.

Равенство d-a=8 возможно при d=8, a=0 или d=9, a=1, но первая цифра не может быть равна нулю, следовательно, a=1, b=9, c=0, d=9.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами BC=30 и AC=40. На сторонах AB, BC и CA выбраны точки C_1, A_1, B_1, соответственно, так, что AC_1=BA_1=CB_1=1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

ОТВЕТ: 554,2

Решение: Обозначим S(ABC) = 600 = S. Тогда S(AB_1C_1) = 1/50 x 39/40 x S; $S(A_1BC_1)$ = 49/50 x 1/30 x S; $S(A_1B_1C)$ = 29/30 x 1/40 x S. Получим $S(K_1L_1M_1)$ = S(1 – 117/6000 – 196/6000 – 145/6000) = 5542/6000 x 600 = 554,2.

7. Число $n+2015$ делится на 2016, а число $n+2016$ делится на 2015. Найдите наименьшее натуральное n, при котором это возможно.

ОТВЕТ: 4058209.

Решение. По условию $\begin{cases} n+2015=2016m, \\ n+2016=2015k. \end{cases}$ Отсюда $2016m-2015k=-1$. Решение этого уравнения в целых числах: $m=-1+2015p$, $k=-1+2016p$. Значит,

$n+2015=2016(-1+2015p) \; =-2016+2016\cdot 2015p$, то есть

$n=-2015-2016+2016\cdot 2015p$. Наименьшее натуральное n равно

$2016\cdot 2015-2015-2016 \; = 2015^2-2016$ = 4 058 209.

.