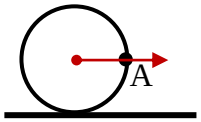
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 01 (БРЯНСК): Возможные решения и ответы.

Задание 1:

Вопрос: Колесо катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Скорость центра колеса постоянна, плоскость колеса вертикальна. Какова величина угла α, образованного векторами скорости и ускорения (относительно поверхности) «самой передней» точки колеса (А)? Ответ обоснуйте.

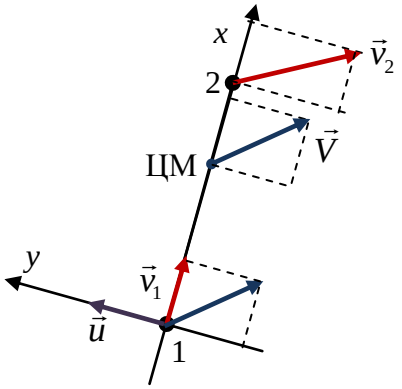


Задача: Две небольшие шайбы с массами m и $2m$, связанные легкой нерастяжимой нитью длины L, скользят по гладкой горизонтальной поверхности. Нить натянута. Найдите силу натяжения нити, если известно, что в некоторый момент времени, когда более легкая шайба двигалась вдоль нити со скоростью v, величина скорости более тяжелой шайбы была в два раза больше.

Ответ на вопрос: Вектор скорости точки А есть сумма вектора скорости центра колеса (направленной горизонтально) и вектора скорости вращения точки А вокруг центра (направленной вертикально вниз). Поскольку проскальзывание отсутствует, то величины этих скоростей равны, и поэтому вектор $\vec{V}_A$ направлен под углом 45° к вертикали. Так как скорость центра колеса постоянна, то ускорение этой точки совпадает с центростремительным ускорением вращательного движения ее вокруг центра, то есть направлено к центру колеса. Таким образом, $\alpha = 90° + 45° = 135°$.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Скорость каждой из шайб можно найти как сумму скорости движения центра масс системы и скорости вращения данной шайбы вокруг центра масс. Ясно, что центр масс движется равномерно и прямолинейно, то есть его скорость $\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{2}{3}\vec{v}_2 = const$ (здесь $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - мгновенные скорости шайб в любой момент времени). Рассмотрим момент времени, описанный в условии, и направим оси координат так, как показано на рисунке. Поскольку нить натянута и нерастяжима (расстояние между ее любыми двумя точками постоянно), то проекции скоростей ее точек на ось x равны: $v_{1x} = v = v_{2x} = V_x$. Поскольку по условию $|\vec{v}_2| = 2v \Rightarrow v_{2y} = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$. Следовательно, $V_y = \frac{1}{3}v_{1y} + \frac{2}{3}v_{2y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}v$. С другой стороны, скорость вращения первой шайбы вокруг центра масс $\vec{u}$ направлена по оси y и равна $u = v_{1y} - V_y = \frac{2}{\sqrt{3}}v$. Центростремительное ускорение первой шайбы при вращении вокруг центра масс (радиус $r_1 = \frac{2}{3}L$) создается именно силой натяжения нити, поэтому: $T = m\frac{u^2}{r_1} = \frac{2mv^2}{L}$.



Ответ: $T = \frac{2mv^2}{L}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: При каких условиях свойства реального газа близки к свойствам идеального газа?

Задача: В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под подвижным поршнем, расположенным на высоте $h_0 = 63$ см над дном цилиндра, находится гелий. На поршень медленно насыпали песок. В результате высота положения поршня уменьшилась до $h_1 = 21$ см. Затем треть песка аккуратно убрали. На какой высоте теперь располагается поршень? Температура содержимого цилиндра и давление воздуха над цилиндром оставались неизменными.

Ответ на вопрос: Для справедливости модели идеального газа необходимо прежде всего выполнение двух условий: расстояние между молекулами должно быть много больше размеров самих молекул и среднее значение абсолютной величины потенциальной энергии взаимодействия молекул должно быть много меньше среднего значения их кинетической энергии. Поскольку расстояние между молекулами (а вместе с ним и потенциальная энергия их взаимодействия) определяются плотностью газа (концентрацией его молекул), а кинетическая энергия – его температурой, то соответствующие условия можно сформулировать так: плотность газа должна быть значительно (на три или больше порядка) меньше плотности соответствующей жидкости, а температура не должна быть слишком низкой (не должна приближаться к «абсолютному нулю»). Ясно, что она не должна быть и слишком высокой (при столкновениях молекул не должны играть существенную роль процессы ионизации). Практически для всех газов, входящих в состав воздуха нормальных условиях их свойства близки к свойствам идеального газа.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: В каждом из равновесных состояний поршня давление гелия $p_{1,2,3}$ уравновешивает вес поршня массой m_0, вес дроби и внешнее давление p_0, то есть $p_1 S = m_0 g + p_0 S$, $p_2 S = (m_0 + m)g + p_0 S$, $p_3 S = \left(m_0 + \frac{2m}{3}\right)g + p_0 S$. Кроме того, поскольку температура неизменна, то давления изменяются обратно пропорционально объемам, и поэтому $\frac{h_0}{h_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{(m_0 + m)g + p_0 S}{m_0 g + p_0 S} = 1 + \frac{mg}{p_1 S} \Rightarrow \frac{mg}{p_1 S} = \frac{h_0}{h_1} - 1$. С другой стороны, для конечной высоты положения поршня h справедливо соотношение: $\frac{h_1}{h} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{(m_0 + 2m/3)g + p_0 S}{p_1 (h_0/h_1) S} = \frac{p_1 S + 2mg/3}{p_1 (h_0/h_1) S} = \frac{h_1}{h_0}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{mg}{p_1 S}\right]$. Подставляя сюда полученное выше выражение, находим, что $h = \frac{3h_0 h_1}{h_1 + 2h_0} = 27$ см.

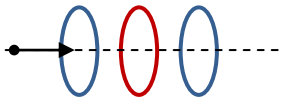
Ответ: $h = \frac{3h_0 h_1}{h_1 + 2h_0} = 27$ см.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Являются ли электростатические силы потенциальными? Ответ обоснуйте.

Задача: Три одинаковых непроводящих кольца радиуса a расположены так, что их оси совпадают, на одинаковом расстоянии, равном также a. На кольца нанесен равномерно распределенный заряд: $-Q$ – на крайние, и $+2Q$ – на среднее. С какой скоростью нужно запустить вдоль оси колец с расстояния a от плоскости крайнего кольца маленький шарик с зарядом $+q$ ($q << Q$) и массой m, чтобы он пролетел все три кольца «насквозь»? Электрическая постоянная равна ε_0.



Ответ на вопрос: Да, являются. Поскольку для электрического поля справедлив принцип суперпозиции, то для обоснования этого утверждения достаточно проверить потенциальность поля точечного заряда. Потенциальность означает, что работа сил при перемещении тела по замкнутому контуру равна нулю. При перемещении заряженного тела в поле точечного заряда работа при «тангенциальных» перемещениях (перпендикулярно радиусу) равна нулю, так как сила Кулона направлена по радиусу. При радиальных перемещениях (вдоль радиуса) силу можно записать как производную от некоторой функции радиуса $F_r = \frac{kQq}{r^2} = -\frac{dU}{dr}$, $U = \frac{kQq}{r}$ (эта функция есть не что иное, как потенциальная энергия взаимодействия зарядов), поэтому работа силы всегда может быть вычислена как изменение этой функции, и при возвращении к исходному значению r работа обращается в ноль.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Рассматривая характер взаимодействия шарика с кольцами, легко заметить, что электростатические силы будут тормозить движение шарика от исходной точки (А) до центра «среднего» кольца (О), а дальше они уже будут его разгонять. Поэтому для прохождения системы колец шарику достаточно пройти точку О. Рассмотрим сначала потенциал зарядов одного кольца на его оси. Поскольку все заряды кольца находятся от данной точки на одинаковом расстоянии $\sqrt{a^2 + l^2}$, где a - радиус кольца, а l расстояние от кольца до точки вдоль оси, то $\varphi(l) = \frac{kQ}{\sqrt{a^2 + l^2}}$. Воспользовавшись принципом суперпозиции, определим потенциал точек А и О в поле зарядов всех трех колец:

$$\varphi_A = \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{k \cdot 2Q}{a\sqrt{5}} + \frac{k(-Q)}{a\sqrt{10}} = -\frac{kQ}{a\sqrt{10}}(\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2}),$$

$$\varphi_O = \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{k \cdot 2Q}{a} + \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} = \frac{kQ}{a}(2 - \sqrt{2}).$$

Закон сохранения энергии для случая, когда в точке О у шара есть ненулевая кинетическая энергия дает: $\frac{mv_0^2}{2} + q\varphi_A > q\varphi_O \Rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2q}{m}(\varphi_O - \varphi_A)} = \sqrt{\frac{2kqQ}{ma}\frac{(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{10}}}$.

Ответ: $v_0 > \sqrt{\frac{2kqQ}{ma}\frac{(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{10}}}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 4:

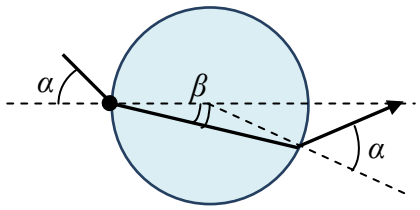
Вопрос: Каковы различия в свойствах изображений, даваемых прозрачным шаром и тонкой линзой со сферическими поверхностями? Ответ поясните.

Задача: Точечный источник света расположен в воздухе практически вплотную к поверхности прозрачного шара. При этом все лучи от этого источника, попадающие внутрь шара, после выхода из него в воздух пересекаются с лучом, проходящим через центр шара. Что можно сказать о показателе преломления вещества этого шара?

Ответ на вопрос: Тонкая линза дает точечные изображения светящихся точек, что позволяет получать четкие изображения (для не очень больших предметов, расположенных не слишком близко к линзе – иначе требования приближения тонкой линзы могут не выполняться). Прозрачный шар также производит преломление луча на двух сферических поверхностях, но он не является тонкой линзой, и поэтому изображения в нем получаются размытыми. Его изображения становятся более четкими лишь при наблюдении удаленных предметов, когда достигающие наблюдателя лучи являются параксиальными, то есть идут на небольшом расстоянии от оси, проходящей параллельно данному лучу через центр шара.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Рассмотрим ход лучей от источника в шаре. Все лучи, прошедшие через шар, пересекаются с лучом, проходящим через центр шара, если при любом угле падения луча α на поверхность шара для угла преломления будет выполняться условие $2\beta < \alpha$. Учитывая, что эти углы не превосходят 90°, можно записать это требование в виде $\sin(\alpha) > \sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta)$. В соответствии с законом преломления $\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n}$, а $\cos(\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\beta)} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n}$. Поэтому требование условия будет выполнено, если для любого $0° < \alpha < 90°$ $2\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} < n^2$. Как видно, прежде всего это требование должно быть выполнено для $\alpha \to 0$ (если оно выполнено для малых α, то автоматически выполнится и для остальных). Значит, $2n < n^2 \Rightarrow n > 2$.



Ответ: показатель преломления $n > 2$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

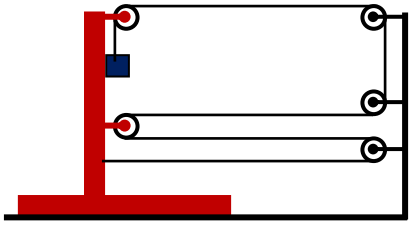
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 02 (СТАВРОПОЛЬ): возможные решения и ответы.

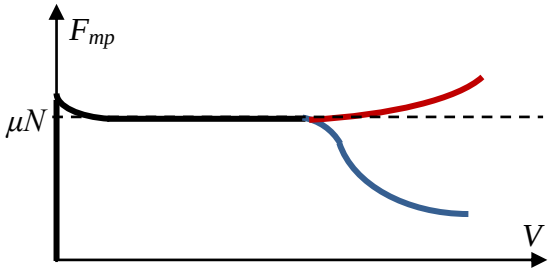
Задание 1:

Вопрос: В чем состоит различие между силами трения покоя и трения скольжения? Опишите возможную зависимость силы трения от относительной скорости трущихся поверхностей.

Задача: Один из концов легкой нерастяжимой нити прикреплен к раме массой M, а на другом подвешен груз массы m. С помощью системы идеальных блоков и этой нити груз и рама связаны с неподвижной стенкой. Если раму удерживать, то неподвижный груз касается рамы. Трения между грузом и рамой нет, коэффициент трения между рамой и горизонтальной поверхностью равен μ. Найти ускорение рамы после отпускания. Ускорение свободного падения g.

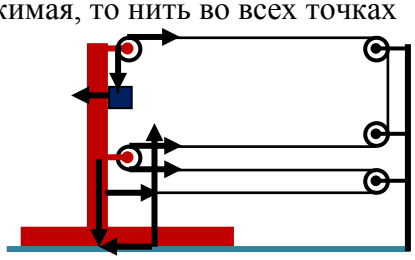


Ответ на вопрос: Все силы трения есть результат межмолекулярных взаимодействий, но обычно разделяют силы трения покоя и силы трения скольжения. Сила трения покоя препятствует проскальзыванию поверхностей и всегда направлена против силы, пытающейся вызвать скольжение. Она равна этой силе по величине и ее момент уравновешивает (вместе с силой нормальной реакции) момент внешних сил, действующих на тело (чтобы обеспечить выполнение условий равновесия). При этом сила трения покоя не может быть произвольной – она принимает значения в интервале от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от свойств поверхностей и силы прижатия их друг к другу (от величины действующей между ними силы нормальной реакции). Если внешняя двигающая сила превосходит это максимальное значение, покой нарушается и начинается скольжение. Сила трения скольжения – сила, направленная против скорости относительного движения поверхностей (она препятствует скольжению, которое уже существует). Величина силы трения скольжения в некотором интервале скоростей относительного движения слабо зависит от этой скорости и вычисляется по формуле $F_{тр} = \mu N$, где N - сила нормальной реакции, а величина μ - коэффициент трения, который зависит от свойств поверхностей. Обычно считается, что максимальная величина силы трения покоя примерно совпадает с величиной силы трения скольжения, но на самом деле для большинства поверхностей она несколько больше μN (этот эффект носит название «эффект застоя»), поэтому в области малых скоростей бывает участок, на котором сила трения падает с ростом скорости. При больших скоростях поверхности могут начать разрушаться и даже плавиться (как лед под скользящим лезвием конька), и тогда сила трения может существенно измениться – как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. Примерный график зависимости силы трения от относительной скорости поверхностей показан на рисунке.



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Так как блок идеальны, а нить легкая и нерастяжимая, то нить во всех точках натянута одинаково с силой T. Со стороны нити на раму действуют силы, горизонтальная составляющая которых равна $4T$, а вертикальная - T (эта сила дополнительно прижимает раму к поверхности). Запишем уравнения движения рамы и груза в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y (на рисунке показаны силы, действующие на раму):



$$\begin{cases} MA = 4T - N - F_{тр} \\ 0 = N' - Mg - T \\ ma_x = N \\ ma_y = T - mg \end{cases}$$

(здесь A - ускорение рамы, $\vec{a}$ - ускорение груза, N - сила нормальной реакции между грузом и рамой, N' - сила нормальной реакции со стороны поверхности, действующая на раму). При скольжении рамы $F_{тр} = \mu N' = \mu(Mg + T)$. Кроме того, здесь есть кинематические связи: так как груз по горизонтали движется вместе с рамой, то $a_x = A$. Так как сдвиг рамы на ΔX вправо приведет к тому, что длина вертикальной части натянутой нити увеличится на $4\Delta X$, то при движении рамы вправо груз будет опускаться и $a_y = -4A$. Решая полученную систему относительно A, найдем: $A = \dfrac{(4-\mu)m - \mu M}{M + (17 - 4\mu)m} g$. Ясно, что этот ответ имеет смысл только при $\mu \le \dfrac{4m}{M+m}$, в противном случае предположение о скольжении рамы не проходит, и на самом деле $A = 0$.

Ответ: $A = \begin{cases} \dfrac{(4-\mu)m - \mu M}{M + (17 - 4\mu)m} g, & \mu \le \dfrac{4m}{M+m} \\ 0, & \mu > \dfrac{4m}{M+m} \end{cases}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Чему может равняться теплоемкость идеального газа? Приведите несколько примеров для известных Вам процессов.

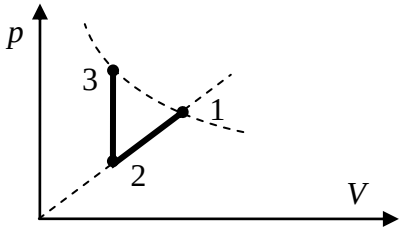
Задача: Некоторое количество азота охлаждают так, что его давление меняется пропорционально его объему. Затем его нагревают при постоянном объеме до начальной температуры. Найдите отношение количества теплоты, отданного газом, к количеству теплоты, полученному им. Азот при рассматриваемых температурах можно считать идеальным газом.

Ответ на вопрос: Теплоемкость – физическая величина, равное отношению количества теплоты, полученного системой в некотором процессе к изменению температуры системы в этом процессе: $C \equiv \dfrac{Q}{\Delta T}$. Поскольку для идеального газа количество теплоты зависит от типа процесса, его теплоемкость может принимать любое значение. Например, при изотермическом расширении газ получает тепло ($Q > 0$), а $\Delta T = 0$, то есть $C = +\infty$. Аналогично для изотермического сжатия $C = -\infty$, для адиабатического процесса $C = 0$. В изохорном процессе изменяется только внутренняя энергия газа. Для ν молей одноатомного идеального газа $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$, и поэтому $C_V \equiv \dfrac{\Delta U}{\Delta T} = \dfrac{3}{2}\nu R$ (R - универсальная газовая постоянная). Для изобарного процесса над одноатомным идеальным газом $Q = p\Delta V + \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T = \dfrac{5}{2}\nu R\Delta T$, и $C_p = \dfrac{5}{2}\nu R$.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Азот – двухатомный газ, поэтому его внутренняя энергия $U = \dfrac{5}{2}\nu RT$. По

условию, охлаждение азота происходит в процессе, который на диаграмме показан как процесс 1-2, в котором давление меняется пропорционально объему, то есть $p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}$. Изменение температуры азота в этом процессе можно вычислить с использованием уравнения Менделеева-Клапейрона: $\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} - \frac{p_1 V_1}{\nu R}$.



С учетом уравнения процесса найдем, что $\Delta T_{12} = \frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{\nu R V_1}$ (ясно, что эта величина отрицательная). Значит, изменение внутренней энергии $\Delta U_{12} = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{12} = \frac{5}{2}\frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{V_1}$. Работа в этом процессе вычисляется как площадь под pV–диаграммой процесса $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{2V_1} = \frac{1}{2}\nu R \Delta T_{12}$. Таким образом, $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 3\nu R \Delta T_{12}$ (мы фактически выяснили, что молярная теплоемкость азота в таком процессе равна $3R$ и постоянна; этот процесс является разновидностью *политропического* процесса). Процесс 2-3 изохорный, и для него $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{23}$. Так как $\Delta T_{12} = -\Delta T_{23}$, то искомое отношение $\frac{|Q_{12}|}{Q_{23}} = \frac{6}{5}$.

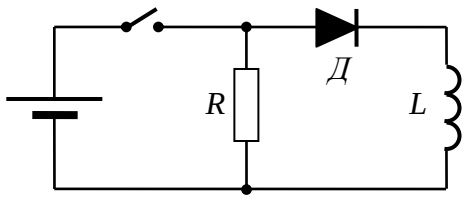
Ответ: $\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{|Q_{12}|}{Q_{23}} = \frac{6}{5}$.

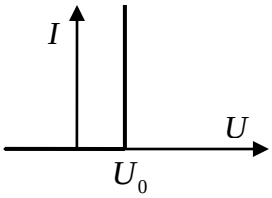
Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Какие физические процессы способствуют тому, что проводимость полупроводникового диода существенно зависит от полярности приложенного напряжения?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. В некоторый момент времени, когда ток в катушке был равен нулю, ключ замкнули. Найти силу тока, который будет течь через резистор спустя достаточно большой промежуток времени. ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно $\mathcal{E}$ и r, омическое сопротивление катушки равно по величине внутреннему сопротивлению источника, сопротивление резистора R и пороговое напряжение диода U_0 считать известными.





Ответ на вопрос: Полупроводниковый диод содержит зону контакта двух материалов с разным типом проводимости или существенно разной концентрацией носителей зарядов. Обычно это полупроводники n- типа (с электронным типом проводимости) и p- типа (с дырочным) или полупроводник и металл. Различие концентраций приводит к диффузии носителей зарядов (электронов и дырок) через границу раздела, и по разные стороны от границы создаются области с ненулевой плотностью зарядов (разного знака). Поэтому вблизи границы возникает направленное в одну сторону электрическое поле (и скачок потенциала). Этот потенциальный барьер и создает разность в условиях прохождения границы раздела зарядами в разном направлении – если носителям зарядов необходимо преодолеть этот барьер (поле зарядов границы тормозит их), то при недостаточной величине приложенного к диоду напряжения они

его не пройдут, и ток через диод не потечет (диод будет заперт). При этом в другом направлении носители зарядов будут легко проходить этот диод (диод будет открыт).

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Спустя достаточно большое время ($t >> \frac{R+2r}{L}$) в данной схеме будут течь практически постоянные токи, и ЭДС индукции в катушке будет равно нулю. Таким образом, катушка будет играть роль резистора с сопротивлением r. Токи в этой схеме зависят от состояния диода. Если диод будет заперт, то ток будет течь только через резистор, и сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Этот режим реализуется, если напряжение на резисторе меньше U_0, то есть $\frac{\mathcal{E}}{R+r}R < U_0 \Rightarrow \mathcal{E} < U_0\left(1+\frac{r}{R}\right)$. При $\mathcal{E} \geq U_0\left(1+\frac{r}{R}\right)$ диод открывается, и тогда напряжение на нем постоянно и равно U_0. Тогда для токов в схеме справедливы уравнения:

$$\begin{cases} I_R R = \mathcal{E} - Ir \\ I_R R = U_0 + I_L r \\ I = I_R + I_L \end{cases} \Rightarrow I_R = \frac{\mathcal{E}+U_0}{2R+r},$$

Мы нашли ток при всех состояниях диода.

Ответ: $I_R = \begin{cases} \frac{\mathcal{E}}{R+r}, & \mathcal{E} < U_0\left(1+\frac{r}{R}\right) \\ \frac{\mathcal{E}+U_0}{2R+r}, & \mathcal{E} \geq U_0\left(1+\frac{r}{R}\right) \end{cases}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 4:

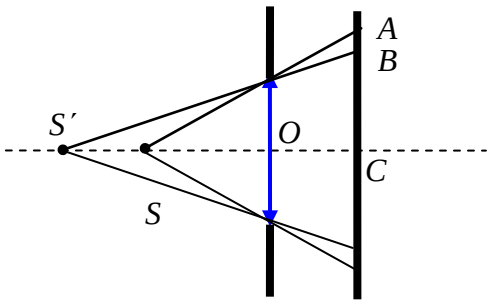
Вопрос: Есть ли связь между параксиальным приближением (в рамках которого углы между оптической осью системы и падающими на нее лучами являются малыми) и приближением тонкой линзы?

Задача: В отверстие радиусом $R = 1{,}5$ см в тонкой непрозрачной перегородке вставлена собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону от перегородки. По другую сторону находится экран. Экран, соприкасающийся вначале с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4{,}5$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ на вопрос: Да. При выводе формулы тонкой линзы помимо предположения о малости ее толщины использовалось именно параксиальное приближение (синусы и тангенсы углов считались примерно равными самим углам в радианной мере).

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Поскольку при отодвигании экрана радиус светлого пятна плавно увеличивается, то лучи, вышедшие из линзы, расходятся, а это возможно только если изображение источника – мнимое. После линзы лучи идут от этого изображения, и поэтому расстояние от линзы до изображения (напомним, что для мнимого изображения это расстояние считается отрицательным): $-b = |OS'| = (-b+L)\frac{R}{r_1}$. Выражая отсюда b, найдем $b = -\frac{LR}{r_1 - R}$. После убирания линзы



светлое пятно создают лучи, идущие напрямую от источника., и аналогично предыдущему для расстояния от источника для линзы получим $a = \frac{LR}{r_2 - R}$. Теперь из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r_2 - r_1}{LR} \Rightarrow F = \frac{LR}{r_2 - r_1} = 18\,\text{см}.$$

Ответ: $F = \frac{LR}{r_2 - r_1} = 18\,\text{см}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

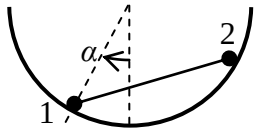
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 03 (ЧЕЛЯБИНСК): возможные решения и ответы.

Задание 1:

Вопрос: При выполнении каких условий твердое тело может находиться в состоянии покоя под действием трех сил, линии действия которых не параллельны?

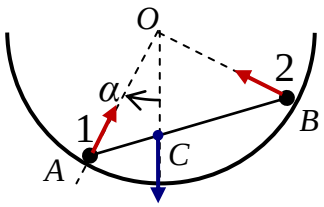
Задача: «Гантель» из легкого жесткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую полусферическую «ямку». Длина стержня в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса ямки. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если радиус, проведенный к первому шарику, составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью. Найти отношение масс шариков.



Ответ на вопрос: Условия равновесия твердого тела требуют равенства нулю векторной суммы всех приложенных к телу сил и суммы моментов этих сил: $\sum_i \vec{F}_i = 0$, $\sum_i M_i = 0$. Для случая трех непараллельных сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, последнее требование можно сделать более наглядным: если выбрать для подсчета моментов ось, проходящую через точку пересечения линий действия двух сил, то моменты этой пары сил равны нулю, и поэтому должен быть равен нулю и момент третьей силы, и поэтому ее линия действия должна проходить через ту же точку! Итак, в этом случае линии действия всех трех сил должны пересекаться в одной точке.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: На стержень с шариками действуют силы нормальной реакции поверхности «ямки». Ясно, что линии их действия – радиусы сферы, и они пересекаются в центре сферической поверхности (точка *O*). В роли третьей силы здесь выступает равнодействующая сил тяжести шариков. Ее точка приложения – центр масс, а линия ее действия вертикальна и (как следует из ответа на вопрос) проходит через точку *O*. Таким образом, центр масс гантели – точка C. Значит, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{|CB|}{|CA|}$. Кроме того,



соотношение между длиной стержня и радиусом позволяет определить угол при вершине *O* в треугольнике *OAB*: это равнобедренный треугольник с основанием в $\sqrt{2}$ раз больше боковой стороны, и он является прямоугольным, а углы при основании равны $\frac{\pi}{4}$. Из теоремы синусов получим, что $|AC| = \sin(\alpha) \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)}$ и $|BC| = \sin(\pi/2 - \alpha) \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)} = \cos(\alpha) \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)}$,

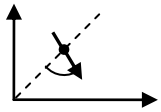
поэтому $\frac{m_1}{m_2} = ctg(\alpha) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = ctg(\alpha) = \sqrt{3}$.

Примечание: Можно решать эту задачу и «традиционным» способом – записав уравнение моментов для четырех сил, действующих на шарики, но в этом случае тоже удобнее считать моменты относительно точки *O*.

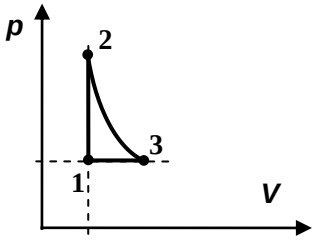
Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:



Вопрос: Диаграмма процесса с идеальным газом пересекает биссектрису координатного квадранта $p-V$ под углом 75° к этой биссектрисе, как показано на рисунке. Получает или отдает газ тепло в этом процессе в окрестности этой точки?

Задача: На рисунке представлена $p-V$-диаграмма процесса над идеальным одноатомным газом, некоторое количество которого является рабочим телом тепловой машины. В этом цикле расширение газа происходит адиабатически. Давление газа в точке 2 на $n\%$ больше его давления в точке 1, а объем в точке 3 – на $k\%$ больше объема в точке 1. Известно, что n и k связаны соотношением: $n/k = 8/3$. Найти КПД цикла.



Ответ на вопрос: Диаграмма процесса в данной точке наклонена к оси объемов под углом 180°-(75°+45)°=60°, поэтому на этой диаграмме связь малых приращений давления и объема $\frac{\delta p}{p_0} \approx -tg(60°)\frac{\delta V}{V_0} = -\sqrt{3}\frac{\delta V}{V_0}$. Количество теплоты для малого участка диаграммы процесса с одноатомным идеальным газом

$$\delta Q \approx p\delta V + \frac{3}{2}\delta(pV) = \frac{5}{2}p\delta V + \frac{3}{2}V\delta p = \frac{p_0\delta V}{2V_0}[5V_0 - 3\sqrt{3}V_0] = -\frac{3\sqrt{3}-5}{2}p_0\delta V < 0.$$

Итак, газ <u>отдает</u> тепло. Ясно, что для двухатомного и трехатомного газов δQ тем более будет отрицательным.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Нетрудно заметить, что газ получает тепло только в процессе 1-2, а отдает – только в процессе 3-1. Поэтому $Q_H = Q_{12} = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}np_1V_1$, а $Q_X = -Q_{31} = \frac{5}{2}p_1(V_3 - V_1) = \frac{5}{2}kp_1V_1$. Следовательно, КПД цикла $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{5k}{3n} = \frac{3}{8}$.

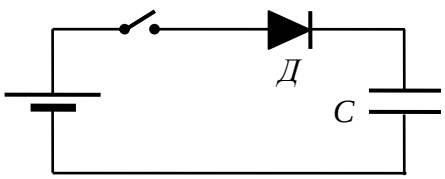
Ответ: $\eta = 1 - \frac{5k}{3n} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$.

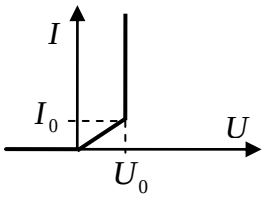
Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Чему равен КПД зарядки разряженного конденсатора от аккумулятора? Как изменится этот КПД, если конденсатор уже был предварительно заряжен?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Перед сборкой схемы конденсатор емкости $C = 20$ мкФ был разряжен. После замыкания ключа он заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В. Какое количество тепла выделится в схеме в процессе зарядки? Какая часть этого тепла (в процентах) выделится в диоде? Пороговое напряжение диода U_0 в $n = 10$ раз меньше ЭДС источника, величина I_0 в $k = 5$ раз меньше тока короткого замыкания источника.





Ответ на вопрос: При зарядке изначально незаряженного конденсатора от аккумулятора конденсатор получает заряд $q = C\mathcal{E}$, приобретает энергию $E = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$, а источник совершает

работу $A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Значит, КПД зарядки $\eta = \frac{E}{A} = 50\%$. Если же конденсатор был заряжен до заряда q_0, то он все равно заряжается в итоге до заряда $q = C\mathcal{E}$, и изменение его энергии $\Delta E = \frac{C^2\mathcal{E}^2 - q_0^2}{2C}$, а работа источника $A = (q - q_0)\mathcal{E} = (C\mathcal{E} - q_0)\mathcal{E}$, поэтому $\eta = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_0}{C\mathcal{E}}\right)$. Как видно, КПД зарядки становится больше 50%, если начальный заряд совпадал по полярности с новым ($\frac{q_0}{C\mathcal{E}} > 0$) и меньше 50%, если не совпадал ($\frac{q_0}{C\mathcal{E}} < 0$).

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Зарядка конденсатора в данной схеме будет состоять из двух этапов: пока напряжение на конденсаторе меньше $\mathcal{E} - I_0 r - U_0 = \frac{nk - n - k}{k} U_0$, диод открыт и падение напряжения на нем равно U_0. На последних стадиях зарядки диод перейдет в режим работы «резистора», но не запрется – зарядка продолжится вплоть до заряда конденсатора $q = C\mathcal{E}$. За время зарядки источник совершит работу, половина которой преобразуется в энергию поля в конденсаторе, а другая половина – выделяется в виде тепла, то есть $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 5{,}76$ мДж. Это и есть общее количество выделившегося тепла. Для подсчета тепловыделения на диоде нужно рассмотреть две стадии зарядки. На первой стадии $U_D = U_0$, и $Q_{D1} = q_1 U_0$, где q_1 - заряд, прошедший через диод на этой стадии. Ясно, что в процессе зарядки конденсатора до напряжения $\frac{nk - n - k}{k} U_0$ через диод протечет заряд $q_1 = C\frac{nk - n - k}{k} U_0$. Итак, $Q_{D1} = \frac{nk - n - k}{k} C U_0^2 = \frac{nk - n - k}{kn^2} C\mathcal{E}^2$.На второй стадии конденсатор заряжается от заряда q_1 до заряда q, поэтому работа источника $A_2 = (q - q_1)\mathcal{E} = \frac{(n+k)C\mathcal{E}^2}{nk}$, а увеличение энергии конденсатора $\Delta E_2 = \frac{q^2 - q_1^2}{2C} = \frac{(n+k)(2nk - n - k)}{2n^2k^2} C\mathcal{E}^2$. Поэтому на этой стадии выделяется тепло $Q_2 = A_2 - \Delta E_2 = \frac{(n+k)^2}{2n^2k^2} C\mathcal{E}^2$. Оно распределяется между диодом (который ведет себя как сопротивление $R_D = \frac{U_0}{I_0} = \frac{k}{n} r$ и внутренним сопротивлением источника r пропорционально их сопротивлениям. Значит, $Q_{D2} = \frac{k}{k+n} Q_2 = \frac{n+k}{2n^2k} C\mathcal{E}^2$. Полное количество тепла, выделившееся на диоде за обе стадии $Q_D = \frac{2nk - n - k}{2n^2k} C\mathcal{E}^2$, поэтому доля диода в общем тепловыделении $\frac{Q_D}{Q} = \frac{2nk - n - k}{n^2k} = 17\%$.

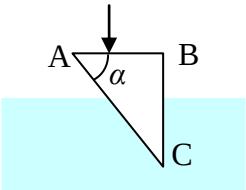
Ответ: полное тепловыделение $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 5{,}76$ мДж, доля диода в нем $\frac{Q_D}{Q} = \frac{2nk - n - k}{n^2k} = 17\%$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: Луч света падает из воздуха на поверхность пластины под углом $30°$. Пластина склеена из тонких слоев с разными показателями преломления (все поверхности слоев параллельны друг другу). Можно ли подобрать слои так, чтобы луч испытал в пластине полное внутреннее отражение? Ответ поясните.

Задача: Прямоугольный клин из оптического стекла с показателем преломления $n_c = 1{,}7$ помещен в глицерин ($n_g = 1{,}47$), как показано на рисунке. При каких значениях угла α луч света, падающий перпендикулярно грани AB, выйдет в глицерин из грани AC?



Ответ на вопрос: Из закона преломления света следует, что для луча, проходящего несколько параллельных преломляющих поверхностей, должно выполняться требование $n \cdot \sin(\alpha) = const$ (здесь α – угол наклона луча к нормали к поверхностям в слое с показателем преломления n). Поскольку луч падает из воздуха ($n_0 \approx 1$), то для всех слоев $n \cdot \sin(\alpha) \approx 0{,}5$. Полное внутреннее отражение реализуется, если для очередного «следующего» слоя определяемое законом преломление значение $\sin(\alpha) \geq 1$. Но тогда в этом слое должно быть $n \leq 0{,}5$, что невозможно для «обычных» прозрачных веществ.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: На первой поверхности преломления не происходит, поскольку падение нормальное, и луч падает на грань AC. Для выхода из грани AC в глицерин луч не должен испытать на этой грани полное внутреннее отражение. Угол падения на грань AC равен α, и поэтому данное требование означает, что $\frac{n_e}{n}\sin(\alpha) < 1 \Rightarrow \alpha < \arcsin\left(\frac{n}{n_e}\right) \approx 59{,}8°$. Отметим, что для практически полного выхода луча в глицерин через эту грань нужно еще обеспечить отсутствие отражения луча от границы раздела «стекло-глицерин», поскольку, как нетрудно убедиться, луч, отраженный от грани AC в случае $\alpha < \arcsin\left(\frac{n}{n_e}\right) \approx 59{,}8°$, не испытает полного внутреннего отражения и от грани BC.

Ответ: $\alpha < \arcsin\left(\frac{n}{n_e}\right) \approx 59{,}8°$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

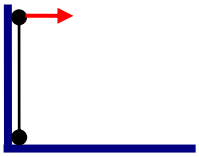
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 05 (ЧЕБОКСАРЫ): возможные решения и ответы.

Задание 1:

Вопрос: Опишите условия, при которых справедлив закон сохранения полной механической энергии.

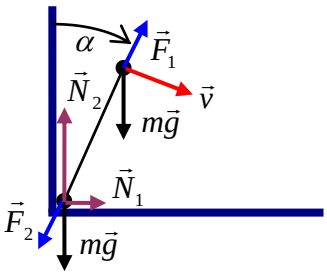
Задача: Гантель из двух массивных одинаковых шариков и легкого жесткого стержня поставлена вертикально в гладкий угол между вертикальной стеной и горизонтальным полом. Верхний шарик подталкивают от стены, сообщая ему скорость v_0 (но не сообщая скорости нижнему шарику). Каким будет угол наклона стержня к вертикали в тот момент, когда сила давления нижнего шарика на стенку будет максимальна? Длина стержня L, ускорение свободного падения g.



Ответ на вопрос: Закон сохранения полной механической энергии справедлив для замкнутых механических систем, в которых все действующие силы являются потенциальными (то есть нет непотенциальных сил). Отметим, что одного условия замкнутости не достаточно – если среди внутренних сил есть, например, силы трения, то механическая энергия системы убывает (переходит в тепло). Более того, в некоторых случаях оно не является необходимым – например, если в системе «Земля – спутник» пренебречь движением Земли и силами сопротивления среды, то можно записать закон сохранения механической энергии для одного спутника, но с учетом его потенциальной энергии в поле тяжести Земли.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Рассмотрим момент времени, когда стержень отклонился от вертикали на угол α. Пренебрегая кинетической энергией нижнего шарика, из закона сохранения энергии найдем, что (пока нижний шарик не отрывается от стенки) скорость верхнего шарика удовлетворяет соотношению



$$\frac{mv^2}{2} + mgL\cos(\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} + mgL \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gL[1-\cos(\alpha)].$$

Центростремительное ускорение этого шарика создается «радиальной» компонентой силы тяжести и силой упругости стержня. Так как верхний шарик движется по окружности радиуса L, то

$$m\frac{v^2}{L} = mg\cos(\alpha) - F_1 \Rightarrow F_1 = mg[3\cos(\alpha) - 2] - m\frac{v_0^2}{L}$$

(сила упругости считается положительной, когда стержень сжат). На нижний шарик действуют силы тяжести, упругости стержня $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, и силы нормальных реакций стенки и пола. Из условия равновесия нижнего шарика по горизонтали $N_1 = -F_2\sin(\alpha) = mg\sin(\alpha)[3\cos(\alpha) - 2 - n]$, где $n \equiv \frac{v_0^2}{gL}$. Таким образом, сила давления шарика на стенку максимальна, когда достигает максимума функция $f(\alpha) = \sin(\alpha)[3\cos(\alpha) - 2 - n]$. Отметим, что при $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{n+2}{3}\right)$ сила давления обращается в ноль, то есть в процессе дальнейшего движения нижний шарик отрывается от стены. Поэтому искомое значение угла должно находиться в интервале значений угла от 0 до α_0, причем при $n \geq 1 \Leftrightarrow v_0 \geq \sqrt{gL}$ отрыв происходит сразу после «толчка», и в этом случае нижний шарик не давит на стену – ответа на вопрос задачи не существует. Записывая

уравнение $f'(\alpha)=6\cos^2(\alpha)-(n+2)\cos(\alpha)-3=0$, и выбирая положительное значение косинуса, найдем, что для искомого угла $\cos(\alpha)=\dfrac{2+n+\sqrt{76+4n+n^2}}{12}$ (как видно, при $v_0=\sqrt{gL}$ и это значение угла обращается в 0). Итак, давление максимально при $\alpha=\arccos\left[\dfrac{2gL+v_0^2+\sqrt{76g^2L^2+4gLv_0^2+v_0^4}}{12gL}\right]$ при $v_0<\sqrt{gL}$.

Ответ: $\alpha=\arccos\left[\dfrac{2gL+v_0^2+\sqrt{76g^2L^2+4gLv_0^2+v_0^4}}{12gL}\right]$ при $v_0<\sqrt{gL}$, а при $v_0\geq\sqrt{gL}$ шарик на стенку не давит.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: В Альпах дует ветер, который местные жители называют «фен». Он сухой и горячий, хотя рождается над холодным морем и переваливает ледниковые поля Альп. Объясните, почему он сухой и горячий.

Задача: Прочный баллон емкостью $V=20$ л заполнили смесью метана (CH_4) и кислорода (O_2) при температуре $t_0=28°C$. В баллоне произвели маломощный разряд, вызвавший химическую реакцию $CH_4+2O_2\rightarrow CO_2+2H_2O$, а затем остудили его содержимое до температуры $t_1=100°C$. После этого на стенках сосуда выступили мелкие капельки воды общей массой $m\approx1$ г, а давление в баллоне стало равно $p\approx1{,}775\cdot10^5$ Па. Найти давление в баллоне до начала реакции. Какими могли быть массы газов, закаченных в баллон? Молярные массы считать равными: для метана $\mu_1\approx16$ г/моль, воды $\mu_2\approx18$ г/моль и кислорода $\mu_3\approx32$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R\approx8{,}31$ Дж/моль·К.

Ответ на вопрос: При прохождении ледниковых полей водяной пар, содержащийся в воздушных массах, конденсируется (поэтому воздух становится намного суше), а за счет теплоты конденсации этот воздух нагревается. В результате спускающийся в долину ветер оказывается сухим и горячим.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Поскольку в конечном состоянии на стенках сосуда выступили мелкие капельки росы, то водяной пар в баллоне стал насыщенным, и его давление $p_1\approx10^5$ Па. Поэтому количество водяного пара $\nu_1=\dfrac{p_1V}{RT}\approx0{,}6452$ моля. Вместе с жидкой частью ($\dfrac{1г}{18г/моль}\approx0{,}0556$ моля) количество воды в баллоне $\nu_B\approx0{,}7$ моля. Оставшуюся часть давления создает смесь газов (CO_2 и либо метан, либо кислород, не израсходованные в реакции), общее количество которых $\nu_2=\dfrac{(p-p_1)V}{RT}\approx0{,}5$ моля. До начала процесса все вещества в баллоне находились в газообразном состоянии, и первоначальное давление

$$p_0=\frac{(\nu_B+\nu_2)RT_0}{V}\approx1{,}5\cdot10^5\text{ Па.}$$

В соответствии с уравнением реакции количество CO_2 в два раза меньше количества воды и равно 0,35 моля, и поэтому второй газ в смеси содержится в количестве 0,15 моля. Таким образом, изначально в баллоне были либо 0,35 моля (5,6 г) метана и 0,85 моля (27,2 г) кислорода, либо 0,5 моля (8 г) метана и 0,7 моля (22,4 г) кислорода.

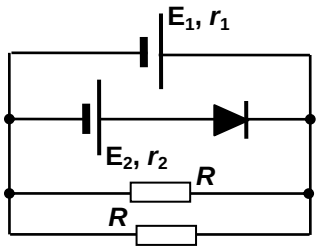
Ответ: $p_0 = \frac{(\nu_B + \nu_2)RT_0}{V} \approx 1{,}5 \cdot 10^5\, Па$, изначально в баллоне были либо 5,6 г метана и 27,2 г кислорода, либо 8 г метана и 22,4 г кислорода.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Источник напряжения каждые $T = 2$ с меняет свою полярность (величина ЭДС и внутреннее сопротивление при этом не изменяются). К нему подключен резистор. В одном случае идеальный диод включается в эту схему последовательно с резистором, в другом – параллельно. Чем отличается ток через резистор в этих случаях?

Задача: В схеме, приведенной на рисунке, диод можно считать идеальным. ЭДС аккумуляторов равны $\mathrm{E}_1 = 36$ В и $\mathrm{E}_2 = 32$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 5$ Ом и $r_2 = 2$ Ом соответственно. Нагрузкой являются два резистора с одинаковым сопротивлением $R = 50$ Ом, соединенные параллельно. Во сколько раз изменится выделяющаяся на нагрузке мощность P, если подключить в качестве нагрузки эти же два резистора, соединенные последовательно?



Ответ на вопрос: При последовательном подключении ток течет через резистор только при той полярности подключения источника, когда диод открыт, а при параллельном подключении – когда диод заперт (поскольку мы считаем диод идеальным, то в открытом состоянии весь ток короткого замыкания источника течет через диод, и при этом напряжение на диоде равно нулю). Величина тока и длительность периодов его протекания и отсутствия при этом не отличаются.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Если диод открыт, то токи I_1 и I_2, текущие в ветвях с ЭДС, удовлетворяют соотношением закона Ома (при сопротивлении нагрузки R_H):

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{E}_1 - I_1 r_1 = IR_H \\ \mathrm{E}_2 - I_2 r_2 = IR_H \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{\mathrm{E}_1}{r_1} - \dfrac{R_H}{r_1} I \\ I_1 = \dfrac{\mathrm{E}_2}{r_2} - \dfrac{R_H}{r_2} I \end{cases}.$$

Подставляем эти соотношения в закон непрерывности тока $I = I_1 + I_2$ и находим, что $I = \frac{\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_H(r_1 + r_2)}$, и поэтому мощность, выделяющаяся при открытом диоде $P = I^2 R_H = \left(\frac{\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_H(r_1 + r_2)}\right)^2 R_H$. Условие, что диод открыт, выполняется, если $I_2 > 0$, то есть если $\mathrm{E}_2 > R_H I \Rightarrow R_H < \frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} r_1$. При $R_H > \frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} r_1$ диод заперт, и тогда ток в нагрузке $I = \frac{\mathrm{E}_1}{r_1 + R_H}$, а выделяющаяся мощность $P' = \left(\frac{\mathrm{E}_1}{r_1 + R_H}\right)^2 R_H$.

При значениях R и r_1, заданных в условии, всегда $\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2}r_1=40$ Ом, то есть при использовании в качестве нагрузки параллельно соединенных резисторов ($R_H=\frac{R}{2}=25$ Ом) диод открыт, а при последовательно соединенных ($R_H=2R=100$ Ом) – заперт. Поэтому

$$n\equiv\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{[\mathrm{E}_1r_2+\mathrm{E}_2r_1][r_1+2R]}{\mathrm{E}_1[2r_1r_2+R(r_1+r_2)]}\right)^2=\frac{41209}{12321}\approx 3{,}34.$$

Ответ: в первом случае мощность в $n=\left(\frac{[\mathrm{E}_1r_2+\mathrm{E}_2r_1][r_1+2R]}{\mathrm{E}_1[2r_1r_2+R(r_1+r_2)]}\right)^2=\frac{41209}{12321}\approx 3{,}34$ раза больше.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: В чем состоит приближение тонкой линзы? Дайте полный ответ.

Задача: Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h=27$ см. Оптическая сила линзы в воздухе $D=5$ дптр. Найти показатель преломления воды.

Ответ на вопрос: При выводе формулы тонкой линзы используется два приближения. Во-первых, толщиной линзы пренебрегали по сравнению с радиусами кривизны сферических поверхностей линзы. Во-вторых, считалось, что все рассматриваемые лучи падают на линзу под малыми углами к ее главной оптической оси (параксиальное приближение – в ходе вычислений тангенсы этих углов заменялись на сами углы в радианной мере). Поэтому приближение тонкой линзы объединяет оба эти требования.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Из условия ясно, что ось пучка совпадает с главной оптической осью линзы и является параксиальным (угол падения крайнего луча на выпуклую поверхность линзы, как и угол преломления его для плоской поверхности малы). Преломление луча на выпуклой поверхности и ход луча внутри линзы не зависит от того, погружена плоская сторона в воду или нет, поэтому крайний луч в обоих случаях выйдет из линзы в одной и той же точке (обозначим расстояние от этой точки до оси r) и попадет в фокус линзы, то есть в воздухе он пересечет оптическую ось на расстоянии $F=1/D$ от линзы, а в воде – на расстоянии h. Поэтому тангенс угла преломления этого луча для плоской поверхности равен $tg(\beta)=\frac{r}{F}=Dr$ в воздухе и $tg(\beta')=\frac{r}{h}$ в воде. Для малых углов тангенсы примерно равны самим углам в радианной мере, как и синусы, поэтому $\frac{tg(\beta')}{tg(\beta)}=\frac{1}{Dh}\approx\frac{\sin(\beta')}{\sin(\beta)}$. С другой стороны, по закону преломления: $\sin(\beta')=\frac{n_Л}{n}\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)=n_Л\sin(\alpha)$, где $n_Л$ - показатель преломления материала линзы, n - воды, а α - одинаковый в обоих случаях угол падения крайнего луча на плоскую поверхность (показатель преломления воздуха мы приняли равным 1). Следовательно, $n\approx Dh=1{,}35$.

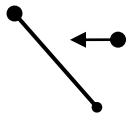
Ответ: $n\approx Dh=1{,}35$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

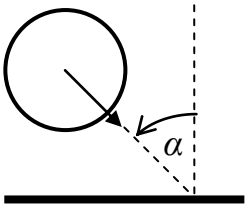
БИЛЕТ № 07 (УФА): возможные решения и ответы:

Задание 1:



Вопрос: На гладкой горизонтальной поверхности лежала гантель из двух небольших шариков с массами m и $2m$ и жесткого легкого стержня длины L. Небольшая шайба ударяется упруго о стержень, и гантель после этого движется поступательно. На каком расстоянии от легкого шарика находилась точка удара?

Задача: Кольцо радиуса $a = 4$ см скользит, не вращаясь, по гладкому горизонтальному льду со скоростью $v_0 = 1$ м/с и ударяется о вертикальный борт. Если скорость кольца направлена перпендикулярно борту, то удар будет упругим, и кольцо после удара будет двигаться поступательно. Найти угловую скорость вращения кольца после удара, если угол падения кольца $\alpha = 45°$. Коэффициент трения между кольцом и бортом $\mu = 0{,}25$.

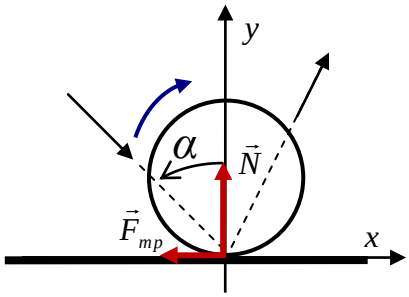


Ответ на вопрос: Для того, чтобы гантель после удара не начала вращаться (то есть стала двигаться поступательно) линия действия силы реакции шайбы при ударе проходила через центр масс гантели (тогда момент этой силы относительно центра масс будет равен нулю). Так как шайба маленькая, то для этого точка удара должна совпадать с центром масс гантели. Так как легкий шарик в два раза легче тяжелого, то центр масс должен находиться от него на расстоянии в два раза большем, чем от тяжелого. Поэтому искомое расстояние равно $r = \frac{2}{3}L$.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Рассмотрим взаимодействие кольца с бортом. На кольцо будут действовать силы нормальной реакции борта и сила трения скольжения (в момент касания у кольца есть ненулевая скорость вдоль борта). По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости кольца на ось y просто меняет знак, и изменение импульса кольца в проекции на ось y

$$mv_y - [-mv_0\cos(\alpha)] = 2mv_0\cos(\alpha) = N\Delta t,$$



где $\vec{v}$ - скорость центра масс кольца после удара, а Δt - малое время удара. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса кольца в проекции на ось x равно $mv_x - mv_0\sin(\alpha) = -\mu N\Delta t = -2\mu m v_0\cos(\alpha)$. Таким образом, проекция скорости центра кольца на ось x после удара $v_x = v_0[\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha)]$. Поскольку для заданных значений $\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$, то скольжение кольца по борту действительно не прекращается за время удара. Кроме того, именно сила трения создает вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Увеличение линейной скорости вращательного движения можно найти из соотношения $mv_{вр} - 0 = \mu N\Delta t = 2\mu m v_0\cos(\alpha) \Rightarrow v_{вр} = 2\mu v_0\cos(\alpha)$.

Для угловой скорости кольца после удара получаем $\omega = \frac{v_{вр}}{a} = \frac{2\mu v_0\cos(\alpha)}{a} \approx 8{,}84\ \text{с}^{-1}$.

Ответ: $\omega = \frac{2\mu v_0\cos(\alpha)}{a} \approx 8{,}84\ \text{с}^{-1}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Как связаны между собой малые изотермические изменения объема (δV) и давления (δp), если начальные значения равны соответственно V_0 и p_0?

Задача: Для адиабатического увеличения давления $\nu = 2$ молей гелия на 0,5% потребовалось совершить над гелием работу $A = 12{,}46$ Дж. Найти начальную температуру гелия. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Ответ на вопрос: В изотермическом процессе $pV = const$, поэтому изменение этой величины при малых изменениях давления и объема равно нулю:

$$\delta(pV) = (p_0 + \delta p)(V_0 + \delta V) - p_0 V_0 \approx p_0 \delta V + V_0 \delta p = 0 \Rightarrow \delta p = -\frac{p_0}{V_0}\delta V .$$

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: В адиабатическом процессе $\delta Q = 0$. Заданное в условии изменение давления можно считать малым, и поэтому $\delta Q = p_0 \delta V + \frac{3}{2}\delta(pV) \approx \frac{5}{2} p_0 \delta V + \frac{3}{2} V_0 \delta p = 0$ (гелий мы рассматриваем как одноатомный идеальный газ). Из этого соотношения находим, что работа над гелием $A \approx -p_0 \delta V \approx \frac{3}{5} V_0 \delta p = \frac{3}{5} p_0 V_0 \frac{\delta p}{p_0}$. Согласно условию, $\frac{\delta p}{p_0} = \frac{1}{200}$, а из уравнения состояния $p_0 V_0 = \nu R T_0$. Поэтому $A \approx \frac{3}{1000}\nu R T_0 \Rightarrow T_0 \approx \frac{1000 A}{3\nu R} \approx 250$ К.

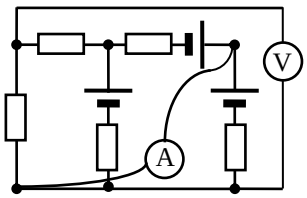
Ответ: $T_0 \approx \frac{1000 A}{3\nu R} \approx 250$ К.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Кольцо из однородной проволоки помещено в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости кольца. К двум его точкам подключили вольтметр. Величину индукции медленно изменяют. Что покажет вольтметр? Ответ пояснить.

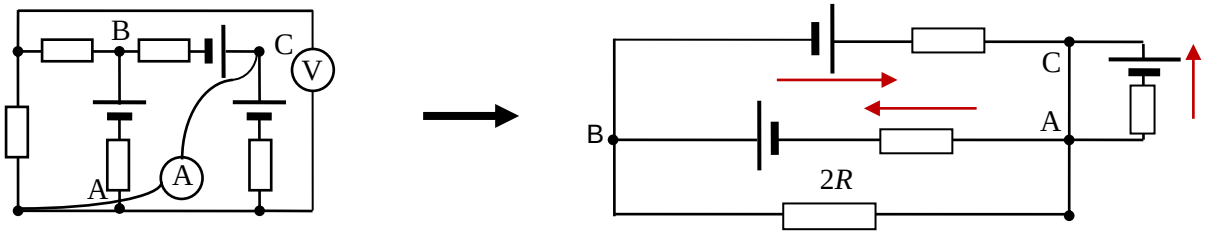
Задача: В схеме, изображенной на рисунке, все резисторы одинаковы и их сопротивление $R = 100$ Ом. Все источники тоже одинаковы, их ЭДС $\mathcal{E} = 16$ В, а их внутренние сопротивления пренебрежимо малы. Амперметр и вольтметр для данной схемы являются практически идеальными. Найти их показания.



Ответ на вопрос: При медленном изменении индукции магнитный поток через кольцо медленно меняется, и в кольце возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ и индукционный ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ (где R - полное сопротивление кольца: при вычислении тока каждый момент времени ЭДС индукции можно считать практически постоянной). ЭДС индукции и сопротивление равномерно распределены по однородному кольцу, поэтому для участка кольца между любыми его двумя точками A и B напряжение $U_{AB} = \Delta\mathcal{E}_i - I\Delta R = \frac{l_{AB}}{L}[\mathcal{E}_i - IR] = 0$ (L – длина кольца, l_{AB} – длина дуги AB). Таким образом, вольтметр покажет нулевую величину напряжения.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Поскольку приборы можно считать идеальными, то вольтметр можно при изучении токов в схеме убрать, а точки, к которым подключен амперметр – закоротить. Тогда



можно преобразовать схему (см. рисунок) без изменения токов в ее ветвях. Тогда очевидно, что в контуре ABC течет ток $I = \frac{2\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R}$, и такой же ток течет через «боковую» ветвь схемы, причем напряжения $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \mathcal{E} - IR = 0$. Поэтому полный ток через ветвь AC с амперметром равен $I_A = 2I = \frac{2\mathcal{E}}{R} = 0{,}32$ А, а вольтметр покажет нулевую величину напряжения.

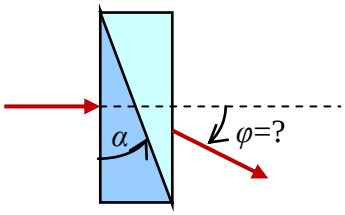
Ответ: $I_A = \frac{2\mathcal{E}}{R} = 0{,}32$ А, а $U_V = 0$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: Сформулируйте закон преломления света в геометрической оптике.

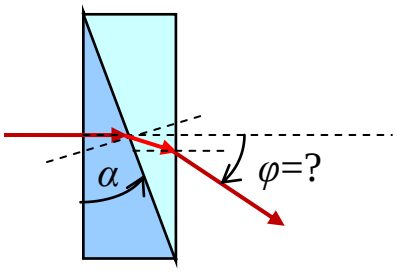
Задача: Узкий пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины, склеенный из двух плотно прижатых клиньев с углом при вершине $\alpha = 4°$. Разность показателей преломления материалов клиньев $\Delta n \equiv n_1 - n_2 = 0{,}3$. Под каким углом к первоначальному направлению выйдет пучок из пластины? При расчетах учесть, что для малых углов $tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$ (в радианной мере).



Ответ на вопрос: При падения луча света на границу раздела прозрачных сред происходит его преломление. Луч падающий, луч преломленный и нормаль к преломляющей поверхности в точке падения лежат в одной плоскости, а отношение синусов углов падения (между падающим лучом и нормалью) и преломления (между нормалью и преломленным лучом) равно отношению абсолютных показателей преломления сред: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_b}{n_a}$. Абсолютный показатель преломления среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в данной среде.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Луч испытывает преломление на двух поверхностях. При использовании закона преломления учтем малость углов падения и преломления, заменяя синусы углов на сами углы в радианной мере. Тогда угол падения на первую из поверхностей, где имеет место преломление угол падения равен α, а угол преломления $\beta = \frac{n_1}{n_2}\alpha$. Угол падения на вторую поверхность – это разность углов



$\gamma = \beta - \alpha = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\alpha$. И, наконец, искомый угол поворота луча есть угол преломления на второй поверхности, то есть $\varphi = n_2\gamma = (n_1 - n_2)\alpha = \Delta n \cdot \alpha = 1{,}2°$.

Ответ: $\varphi = \Delta n \cdot \alpha = 1{,}2°$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

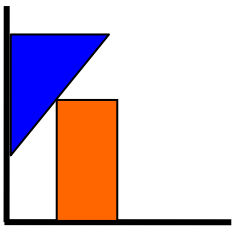
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 08 (МОСКВА): Возможные решения и ответы.

Задание 1:

Вопрос: Кубик лежит на ровной поверхности, угол наклона которой к горизонту плавно увеличивают. При какой величине коэффициента трения кубик начнет «кувыркаться», но еще не начнет скользить?

Задача: Клин с углом α при вершине может скользить без трения по вертикальным направляющим и опирается на брусок, стоящий на горизонтальной поверхности. Масса бруска в $n=2$ раза больше массы клина, высота бруска во столько же раз больше его ширины, коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu=\frac{2}{3}$. При каких α брусок может покоиться?

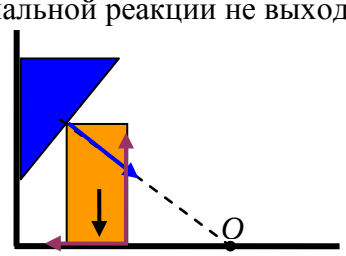


Ответ на вопрос: Кубик начинает скользить, когда тангенс угла наклона плоскости становится больше коэффициента трения: $tg(\alpha)\geq\mu$. Кубик начинает кувыркаться, когда вертикаль, проходящая через его центр масс, оказывается вне площади опоры, то есть при $\alpha>45°$. Таким образом, для того, чтобы кубик сначала начал кувыркаться, необходимо, чтобы $\mu>tg(45°)=1$.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Сила F, действующая на клин со стороны бруска, направлена перпендикулярно поверхности клина, и ее вертикальная составляющая уравновешивает вес клина: $F\sin(\alpha)=\frac{mg}{n}\Rightarrow F=\frac{mg}{n\sin(\alpha)}$ (m - масса бруска). На брусок в состоянии покоя действует «ответная» сила F, сила тяжести, сила нормальной реакции поверхности и сила трения покоя. Сила трения должна быть равна $F_{тр}=F\cos(\alpha)=\frac{mg}{n}ctg(\alpha)$, а сила нормальной реакции поверхности $N=F\sin(\alpha)+mg=mg\frac{n+1}{n}$. Условие отсутствия проскальзывания $F_{тр}\leq\mu N\Rightarrow ctg(\alpha)\leq\mu(n+1)\Rightarrow\alpha\geq arctg\left(\frac{1}{\mu(n+1)}\right)=arctg(0{,}5)\approx 26{,}6°$. С другой стороны, брусок не будет кувыркаться, если точка приложения силы нормальной реакции не выходит из его площади опоры (для этого угол α снова должен быть не слишком маленьким). «Критический» угол определяется из условия, что ее точка приложения сместилась на край площади опоры. Правило моментов для этого случая относительно точки O дает:

$$N\cdot[nd\,ctg(\alpha)-d]=mg[nd\,ctg(\alpha)-d+d/2].$$



С учетом выражения для N находим, что для критического угла $tg(\alpha)=\frac{2n}{n+2}$. Поэтому брусок не будет кувыркаться, если $\alpha\geq arctg\left(\frac{2n}{n+2}\right)=arctg(1)=45°$. Более жестким оказывается второе ограничение, поэтому оно и является общим.

Ответ: $\alpha\geq arctg\left(\frac{2n}{n+2}\right)=45°$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: В цилиндрическом сосуде под поршнем находился водяной пар с температурой $100°C$ и давлением 0,5 Атм. Объем пара изотермически уменьшили втрое. Каким стало его давление?

Задача: Герметичный гладкий вертикальный цилиндр сечением S разделен на две части тяжелым теплоизолирующим подвижным поршнем массы M. Под поршнем находится гелий, начальное давление которого равно p, а над поршнем – насыщенный водяной пар с температурой T. Гелий медленно нагревают, а температуру пара поддерживают постоянной. Во сколько раз отличается количество теплоты, отведенное от пара, от количества теплоты, сообщенного гелию? Молярную массу μ и удельную теплоту парообразования λ воды, а также универсальную газовую постоянную R и ускорение свободного падения g считать известными.

Ответ на вопрос: Если вся вода в сосуде под поршнем останется в газообразном состоянии, то давление пара должно будет увеличится в три раза, и составит 1,5 Атм. Но это больше, чем давление насыщенного водяного пара при $100°C$ (оно, как известно из определения этой реперной точки шкалы Цельсия, равно 1 Атм). Поэтому на самом деле при таком уменьшении объема часть пара сконденсируется, и давление пара будет равно давлению насыщенного пара, то есть 1 Атм.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Так как пар насыщенный, то его давление определяется только температурой (равно давлению насыщенного пара p_H при температуре T). Поэтому начальное давление гелия $p = p_H + \frac{Mg}{S} \Rightarrow p_H = p - \frac{Mg}{S}$. При нагревании гелия он будет расширяться, совершая работу против веса поршня и силы давления пара. Давление пара изменяться не будет (так как температура неизменна), но будет происходить его конденсация. Часть образовавшейся воды осядет на поршне, увеличивая его массу. Однако, поскольку по условию поршень «тяжелый», можно считать, что масса пара много меньше массы поршня и изменением массы поршня из-за конденсации можно пренебречь. Тогда расширение гелия происходит почти изобарически, и подведенное к нему при увеличении его объема на ΔV тепло $Q_1 = A + \Delta U \approx p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) \approx \frac{5}{2}p\Delta V$. Для сохранения постоянной температуры пара от него нужно отводить тепло конденсации $Q_2 = \lambda \cdot \Delta m$, где Δm - масса сконденсировавшейся воды. Поскольку плотность насыщенного водяного пара можно выразить через давление, используя уравнение Менделеева-Клапейрона $\rho_H = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mu p_H}{RT}$, то $\Delta m = \frac{\mu p_H}{RT}\Delta V = \frac{\mu(p - Mg/S)}{RT}\Delta V$, и $Q_2 = \lambda \cdot \frac{\mu(p - Mg/S)}{RT}\Delta V$. Значит, $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2\lambda\mu}{5RT}\left(1 - \frac{Mg}{pS}\right)$.

Ответ: $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2\lambda\mu}{5RT}\left(1 - \frac{Mg}{pS}\right)$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Объясните, почему закон движения при малых колебаниях тела вокруг положения устойчивого равновесия часто с хорошей точностью является гармоническим (то есть описывается функциями синуса или косинуса).

Задача: Два маленьких шарика с зарядами $+q$ каждый надеты на непроводящий вертикальный стержень. Нижний шарик закреплен, а верхний может свободно скользить по

стержню. Расстояние между шариками в положении равновесия равно L. Найдите период малых колебаний верхнего шарика. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения g.

Ответ на вопрос: В положении устойчивого равновесия сила, действующая на тело, обращается в ноль, и при отклонении тела от этого положения она должна возвращать тело в него. Таким образом, сила как функция отклонения от положения равновесия x: $F_x = f(x)$ должна удовлетворять требованиям $f(0)=0$ и $f_x'(0)<0$. Поскольку на маленьком участке график любой такой функции можно приближено заменить на касательную $F_x = -kx$, $k \equiv -f_x'(0)$, то и уравнение движения с той же точностью сводится к уравнению гармонических колебаний $x_t'' + \frac{k}{m}x = 0$, решением которого являются функции синуса и косинуса.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: В положении равновесия $mg - \frac{kq^2}{L^2} = 0$. При движении верхнего шарика вдоль вертикальной оси $ma_x = k\frac{q^2}{(L+x)^2} - mg$ (ось x направлена вдоль стержня вверх, и начало отсчета совмещено с положением равновесия), и с учетом первого уравнения $\frac{kq^2}{gL^2}a_x = \frac{kq^2}{(L+x)^2} - \frac{kq^2}{L^2} \Rightarrow a_x = -g\frac{x(2L+x)}{(L+x)^2}$. Т.к. колебания малые, то $x \ll L$, и $a_x \approx -\frac{2g}{L}x$.

Частота колебаний в этом случае равна $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$, а период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$.

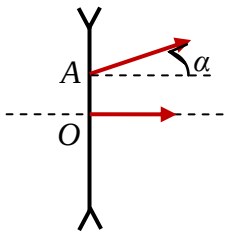
Ответ: $T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

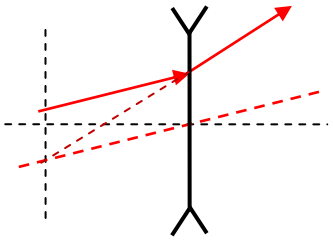
Задание 4:

Вопрос: Опишите способ построения продолжения произвольного параксиального луча, падающего на поверхность тонкой рассеивающей линзы (в любой точке под любым углом).

Задача: Точечный источник света находится перед рассеивающей линзой. Луч от этого источника, падающий на линзу в точке О, идет после линзы вдоль ее главной оптической оси. Луч, падающий на линзу в точке А (расстояние $|OA| = l = 2$ см), выходит из линзы под углом $\alpha = 6°$ к оптической оси. Фокусное расстояние линзы $F = 25$ см. На каком расстоянии от линзы находится источник?

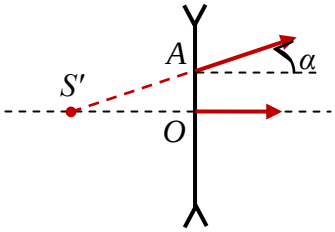


Ответ на вопрос: Для построения продолжения произвольного луча можно использовать тот факт, что тонкая рассеивающая линза преломляет параллельные лучи так, что их продолжения пересекаются в ближней фокальной плоскости линзы. Поэтому достаточно построить вспомогательный луч, параллельный рассматриваемому и проходящий через оптический центр линзы без преломления. Продолжения этих лучей должны пересечься в фокальной плоскости (см. рисунок).



Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Прежде всего заметим, что луч, выходящий из оптического центра линзы, идет вдоль главной оптической оси. Это означает, что источник находится на главной оптической оси линзы. Построив продолжение луча, выходящего из точки А, найдем положение изображения источника, находящегося от линзы на расстоянии $b = -l \cdot ctg(\alpha)$ (этот мнимое изображение). Согласно формуле линзы, расстояние от источника до линзы a определяется из соотношения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$,



то есть $a = -\frac{Fb}{F+b} = \frac{Fl}{Ftg(\alpha) - l}$. Подставляя значения, находим: $a \approx 79{,}6$ см.

Ответ: $a = \frac{Fl}{Ftg(\alpha) - l} \approx 79{,}6$ см.

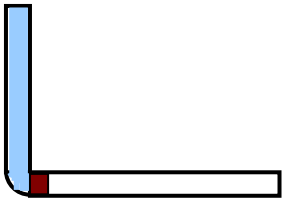
Максимальная оценка: **20 баллов.**

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2015 года

БИЛЕТ № 09 (МОСКВА): возможные решения и ответы

Задание 1:

Вопрос: На некотором участке пути тела результирующая сила, действующая на него, пропорциональна расстоянию до края этого участка (и направлена к этому краю). Какими функциями описывается закон движения тела на этом участке?



Задача: Вертикальное колено изогнутой под прямым углом гладкой трубки постоянного сечения заполнено жидкостью, которую можно считать практически идеальной. Высота этого колена равна L (и она заметно больше поперечного размера трубки), а переливание ее в горизонтальное колено не допускается благодаря удерживаемой неподвижно легкой пробке. В некоторый момент пробку аккуратно отпускают. За какое время после этого пробка вылетит из трубки? Длина горизонтального колена $L' = \frac{3}{2}L$, поверхностное натяжение не учитывать.

Ответ на вопрос: Если ввести координатную ось x, направленную вдоль заданного участка пути выбрать на ней начало отсчета, совмещенное с краем участка, то уравнение движения тела $ma_x = -kx$ является уравнением гармонических колебаний, поэтому закон движения $x(t)$ описывается функциями синуса и косинуса.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Будем следить за движением пробки в проекции на горизонтальную координатную ось x. Ускорение появляется благодаря давлению вертикального столба жидкости, которое обращается практически в ноль, когда вся жидкость перельется в горизонтальное колено. Поэтому совместим начало отсчета координаты x с положением пробки именно в этот момент времени. С учетом неразрывности течения жидкости, в любой момент времени вместе с пробкой (с теми же скоростью и ускорением) будет двигаться вся жидкость, и поэтому

$$(m + \rho SL)\, a_x = \rho\, S\, h(x)\, g = -\rho S g\, x \quad \Rightarrow \quad x_t'' + \frac{\rho\, S\, g}{m + \rho\, S\, L}\, x = 0$$

(здесь $h(x)$ - высота столба жидкости в вертикальном колене как функция x). Так как пробка легкая, то это уравнение сводится к $x_t'' + \frac{g}{L}x = 0$, и поэтому закон движения пробки от момента старта (когда $x(0) = -L$, $v_x(0) = 0$) до момента переливания жидкости в горизонтальное колено ($x(t_1) = 0$) – гармонический: $x(t) = -L \cdot \cos(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Переливание закончится в момент времени t_1: $x(t_1) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(\omega t_1) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$. Далее пробка и жидкость, очевидно, будут двигаться с постоянной скоростью (высота столба жидкости уменьшилась до нуля) $V = v_x(t_1) = \omega L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \omega L = \sqrt{gL}$. Поэтому оставшийся путь по трубке пробка пройдет за время $t_2 = \frac{L/2}{V} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$, и полное время движения пробки по трубке $t = t_1 + t_2 = \frac{\pi + 1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

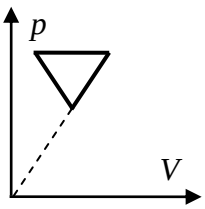
Ответ: за время $t = \frac{\pi + 1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Чему может быть равен КПД тепловой машины при заданном соотношении температур нагревателя и холодильника?

Задача: На рисунке в координатах $p-V$ представлен цикл одноатомного идеального газа, являющегося рабочим телом тепловой машины. Диаграмма цикла имеет вид равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси объемов, а продолжение одной из сторон проходит через начало координат. Известно, что при изобарном расширении абсолютная температура газа возрастает в $n=2$ раза. Найти КПД этого цикла.



Ответ на вопрос: При заданном соотношении температур нагревателя и холодильника (при различных вариациях формы цикла) КПД тепловой машины может принимать различные значения от нуля до максимально возможного: $0<\eta\le\eta_{\max}$. Максимально возможный КПД $\eta_{\max}=1-\dfrac{T_X}{T_H}$ соответствует идеальной тепловой машине, работающей по циклу Карно, состоящему из двух адиабат и двух изотерм.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Пусть точки цикла пронумерованы так, что 12 – это процесс изобарного расширения, 23 – процесс с диаграммой, проходящей через начало координат, а давление и объем газа в точке 1 равны p и V. Тогда, согласно условию: $p_2=p$, $T_2=nT_1\Rightarrow V_2=nV_1$, $V_3=\dfrac{V_1+V_2}{2}=\dfrac{n+1}{2}V$. Поскольку точки 2 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то $\dfrac{p_3}{p_2}=\dfrac{V_3}{V_2}=\dfrac{n+1}{2n}\Rightarrow p_3=\dfrac{n+1}{2n}p$. Теперь можно вычислить теплоту любого из процессов. При заданном $n=2$ тепло поступает к рабочему телу только на участке 12, поэтому теплота нагревателя $Q_H=Q_{12}=p(V_2-V_1)+\dfrac{3}{2}p(V_2-V_1)=\dfrac{5}{2}(n-1)pV$. Работа в цикле $A=\dfrac{1}{2}(V_2-V_1)(p_1-p_3)=\dfrac{(n-1)^2}{4n}pV$. Поэтому $\eta=\dfrac{A}{Q_H}=\dfrac{n-1}{10n}=5\%$.

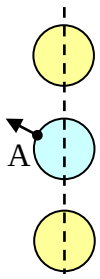
Ответ: $\eta=\dfrac{n-1}{10n}=5\%$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Напряженность статического электрического поля вблизи поверхности Земли около 100 В/м. Чему равна разность потенциалов между концами металлического шеста высотой 2,5 м, установленного вертикально?

Задача: Три шара радиуса $a=40$ см расположены так, что их центры находятся на одной прямой на расстоянии $3a=120$ см друг от друга. Крайние шары – непроводящие, и по поверхности каждого из них равномерно распределен заряд $q=1$ мкКл. Средний шар – проводящий, и его заряд равен $-2q=-2$ мкКл. От точки А на поверхности среднего шара оторвался без начальной скорости ион с удельным зарядом $\beta=2{,}5\cdot10^6$ Кл/кг, и удалился на большое расстояние от шаров. До какой скорости он при этом разогнался? Излучением пренебречь. Константа в законе Кулона $k\approx9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2.



Ответ на вопрос: Проводящий (металлический) шест является эквипотенциальным – все его точки имеют одинаковый потенциал. Поэтому разность потенциалов между любыми двумя его точками равна нулю.

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Электрические силы потенциальны, поэтому работа этих сил не зависит от пути перемещения тела – только от разности потенциалов конечной и начальной точек. Проводящий шар эквипотенциален – вместо потенциала точки А можно взять потенциал любой другой точки шара – например, его центра. Под действием поля зарядов крайних шаров заряды на проводящем шаре перераспределятся сложным образом, но это не повлияет на потенциал центра – полный заряд поверхности шара неизменен. Потенциал центра проводящего шара считается по принципу суперпозиции $\varphi_A = 2\cdot\frac{kq}{3a} + \frac{k(-2q)}{a} = -\frac{4}{3}\frac{kq}{a}$. Потенциал точек «на большом расстоянии» от нашей системы зарядов равен нулю, и поэтому увеличение кинетической энергии иона $\frac{mv^2}{2} = \mp(0-\varphi_A)\beta m = \mp\frac{4kq\beta m}{3a} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}}$. Видно, что для удаления «на большое расстояние» без начальной скорости ион должен был быть отрицательно. Подставляя числовые значения, получим: $v \approx 387$ км/с.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}} \approx 387$ км/с.

Максимальная оценка: **20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: Чему может быть равно увеличение (отношение размера изображения к размеру предмета), даваемое тонкой собирающей линзой?

Задача: Тонкая линза, используемая в качестве лупы, дает на поверхности стола четкое изображение нити лампы, висящей под высоким потолком комнаты, если линза находится на расстоянии $l = 6$ см. С каким увеличением будет наблюдаться текст на лежащей на столе странице, если глаз наблюдателя будет находиться на расстоянии $L = 30$ см от рассматриваемого изображения?

Ответ на вопрос: Из построения хода лучей для линзы ясно, что поперечное увеличение предмета равно отношению расстояний от линзы до изображения b и от линзы до источника a: $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}$ (увеличение принимают отрицательным, когда изображение перевернуто.). Из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{F}{F-a}$. Для разных действительных источников $a > 0$ мы можем получить $\Gamma_\perp > 1$ (при $0 < a < F$), $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| > 1$ (при $F < a < 2F$) и $\Gamma_\perp < 0, |\Gamma_\perp| < 1$ (при $a > 2F$).

Максимальная оценка: **5 баллов.**

Решение задачи: Прежде всего заметим, что при использовании тонкой собирающей линзы в качестве <u>лупы</u> (то есть для рассматривания прямых увеличенных изображений) мы должны наблюдать мнимое изображение с заметным увеличением, для чего предмет должен находится чуть ближе к линзе, чем ее фокальная плоскость. Поскольку расстояние до нити лампы очень велико, то ее изображение в первом опыте должно наблюдаться в фокальной плоскости линзы. Значит, фокусное расстояние линзы $F \approx l$. Во втором опыте расстояние от глаза до изображения заметно больше фокусного расстояния линзы, и глаз должен находиться достаточно близко к линзе, поэтому можно считать, что расстояние от линзы до изображения примерно равно L. Теперь, воспользовавшись формулой линзы, найдем соответствующее расстояние от линзы до рассматриваемых фрагментов текста a: $\frac{1}{a} - \frac{1}{L} \approx \frac{1}{l} \Rightarrow a \approx \frac{Ll}{L+l}$ (как обычно, расстояние до мнимого изображения считается в этой формуле отрицательно). Значит,

$$|\Gamma_\perp| \approx \frac{L}{a} \approx \frac{L}{l} + 1 = 6.$$

Ответ: $|\Gamma_\perp| \approx \frac{L}{l} + 1 = 6$.

Максимальная оценка: **20 баллов.**